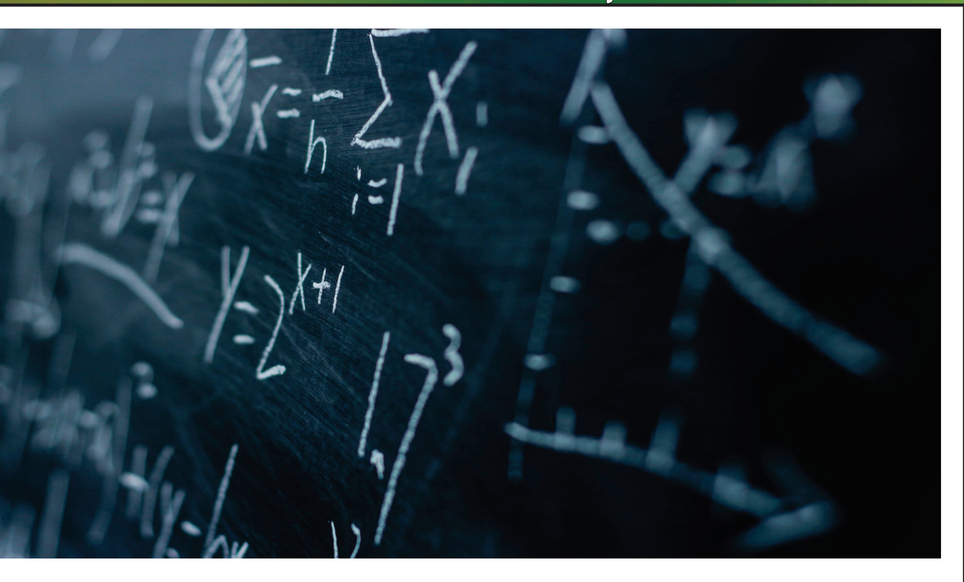
Enrique Mateus-Nieves



Del Cálculo Infinitesimal a las Matemáticas Modernas

iOLE EDITORA

DEL CÁLCULO INFINITESIMAL A LAS MATEMÁTICAS MODERNAS

DEL CÁLCULO INFINITESIMAL A LAS MATEMÁTICAS MODERNAS

ENRIQUE MATEUS-NIEVES

BOA VISTA/RR
2023

Editora IOLE

DATOS INTERNACIONALES DEL CATÁLOGO EN PUBLICACIÓN (CIP)

Ma2 MATEUS-NIEVES, Enrique.

Del Cálculo Infinitesimal a las Matemáticas Modernas. Boa Vista: Editora IOLE, 2023, 395 p.

Serie: Educación. Editor: Elói Martins Senhoras.

ISBN: 978-65-85212-61-8
https://doi.org/10.5281/zenodo.8419474

1 - Cálculo. 2 - Educación. 3 - Evolución Histórica. 4 - Matemática.
I - Título. II - Mateus-Nieves, Enriques. III - Educación. IV - Serie

CDD–510

EDITORIAL

La editorial IOLE tiene como objetivo dar a conocer la producción de obras intelectuales que tengan calidad y relevancia social, científica o didáctica en diferentes áreas del conocimiento y dirigidas a un amplio público de lectores con diferentes intereses.

Las publicaciones de la editorial IOLE están destinadas a aportar aportes al avance de la reflexión y la praxis en diferentes áreas del pensamiento y a la consolidación de una comunidad de autores comprometidos con la pluralidad del pensamiento y con una creciente institucionalización de los debates.

El contenido producido y publicado en este libro es responsabilidad exclusiva de los autores en términos de forma, corrección y confiabilidad, no representando el discurso oficial de la editorial IOLE, que es responsable exclusivamente de la edición, publicación y difusión del trabajo.

Concebido como un material de alta capilaridad para sus lectores potenciales, este libro de la editorial IOLE se publica en formato impreso y electrónico con el fin de propiciar la democratización del conocimiento a través del libre acceso y difusión de las obras.

Prof. Dr. Elói Martins Senhoras

(Redactor Jefe)

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

Esta obra es una historiografía que inició en 2009 buscando identificar una ontogénesis del cálculo infinitesimal desde su dos grandes ramas: el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral. En dicho barrido histórico se observaron rupturas epistemológicas que llevaron a la construcción de nuevos paradigmas, nuevos conceptos que en algunas ocasiones permitieron responder las preguntas de la época, y en otros la generación de nuevas ramas de las matemáticas. Situación que influyó en la forma como se hacían las matemáticas. La búsqueda de rigor en los procesos que se creaban resultó en una estructura compleja, compuesta por diversas ramificaciones que dieron origen a lo que hoy conocemos como las Matemáticas Modernas. Durante la historiografía, permítanme la analogía, se encontraron muchos tipos de caminos, algunos lisos, pavimentados por los que fue fácil recorrer distancias y observar procesos de construcción teórica. Hubo otros áridos, desérticos y de difícil tránsito, en los que fue necesario acudir a fuentes secundarias de historia de la matemática para tratar de allanar esos tortuosos senderos. Hubo momentos en los que se halló respuesta, en otros se profundizó el abismo al punto que, en esas ocasiones, los caminos eran inhóspitos, ciegos y con el ánimo de poder avanzar fue necesario acudir a fuentes primarias de información para poder comprender las situaciones y entender la generación de nuevos conceptos, de nuevas formas de hacer matemáticas. Entre esas fuentes primarias fue necesario conocer los trabajos de Descartes, Euler, Gauss, Fourier, Cantor, Lebesgue, Hilbert, Banach, Newman, Dieudonné, por nombrar algunos, con el objeto de clarificar la construcción y evolución de conceptos que derivaron en nuevas ramas de las matemáticas, entre ellas: análisis matemático, análisis complejo, análisis funcional, topología, topología algebraica y el más reciente, el análisis no estándar.

Debido a la poca literatura existente en Educación Matemática dedicada a la educación superior, que trate temas propios del Pensamiento Matemático Avanzado, motivó adelantar esta investigación, desde una compilación de temas relacionados con la epistemología de cálculo infinitesimal con el objeto de ofrecer estrategias didáctico-metodológicas a los que desean aprender y a los que enseñan esta rama de las matemáticas desde la educación secundaria y particularmente la formalizan en la educación superior. La complejidad al enseñarlas y las dificultades identificadas y reportadas en la escasa literatura existente al momento de aprenderlas, motiva el interés en desarrollar este tipo de trabajo que hoy se pone a su consideración, con el ánimo que tanto los que aprenden como los que enseñan, conozcan que la ontología del cálculo tiene intrínseca una complejidad epistémica en sus conceptos y estructuras matemáticas, situaciones que hacen complejo enseñarlas y aprenderlas, factores que muchas veces se desconocen por diversas razones. El fracaso escolar que reportan las estadísticas de varios países, particularmente latinoamericanos, en los estudiantes que terminan su educación secundaria y en los que inician la educación superior, unido a la alta tasa de deserción escolar universitaria, son debidos a fracasos en el aprendizaje del cálculo (diferencial e integral). La repitencia o el abandono de la universidad por estos factores mencionados al momento de estudiar estos cálculos no es gratis, ni por descuido de los estudiantes o de los procesos de enseñanza, que regularmente están centrados en el paradigma formal-mecanicista, que desconoce la existencia de una complejidad epistémica en las matemáticas mismas, que hace necesario el conocimiento y desglose de conceptos, procesos y temáticas que se pretenden seguir para que los estudiantes comprendan, aprendan y desarrollen competencias matemáticas que apliquen en su quehacer profesional.

A lo largo de la obra se describe, en algunos apartados al detalle, cómo cada sociedad participante en la construcción de las diversas ramas que conforman el cuerpo de las matemáticas modernas, fue contrastando conceptos, procesos y formas de actuar matemáticamente, buscando cada vez mayor rigor y precisión en cada definición, en cada concepto, de cada tema que requería rastrearse, la forma en que se enfrentaron las numerables preguntas que debían responderse desde constructos matemáticos a situaciones de la vida cotidiana. Aquí es claro que las matemáticas han sido y siguen siendo usadas porque ofrecen respuesta a situaciones propias de la cotidianeidad, la física, la economía y el diario vivir de la humanidad, por su doble condición: porque son una ciencia y a la vez son una herramienta útil para entender la naturaleza.

El interés por desarrollar en los estudiantes universitarios competencias en lo que se ha denominado STEM, por su sigla en inglés (Science, Technology, Engineer, Mathematics), fue otra razón que motivó iniciar este estudio de temas propios de cálculo diferencial e integral. Situación que ocasionó dar inicio a esta historiografía, que cubre aproximadamente desde el siglo V antes de nuestra era con el trabajo de los griegos, hasta los avances alcanzados en el siglo XX. Se rastreó y se muestra la forma cómo cada generación abordó las diferentes situaciones problema que se presentaban y cómo cada hombre, y cada sociedad fueron marcando hitos en la construcción de las complejas Matemáticas Modernas. Se encontraron diversas demostraciones, la mayoría fueron adaptadas a terminología de las Matemáticas Modernas, con el objeto que sean comprensibles, formateo que se elaboró sin descuidar la vigilancia epistemológica del saber que se desea trasmitir. Se resaltan las formas, los constructos teóricos y las encrucijadas a las que muchos de sus autores se enfrenaron ante las mordaces críticas de sus contemporáneos, y la forma como la sociedad matemática las superó.

Durante el barrido histórico se observó que primero fue el cálculo integral, su génesis se remonta a la antigua Grecia, y solo hasta la edad media se crea el cálculo diferencial a cargo de Newton y Leibniz, cuya construcción fue el producto del aporte de innumerables matemáticos anteriores a estos dos hombres, de ellos se acentúa, en este trabajo, la habilidad de comprender y articular todas esas obras anteriores para llegar a la construcción de cálculo infinitesimal. La historia de las matemáticas muestra a Newton como el pionero y a Leibniz como un coautor de dicha construcción. Llamó la atención que contrario a la forma como se enseñan actualmente el cálculo infinitesimal, en la educación superior, se inicia con el cálculo diferencial, pasando luego por el cálculo integral y en algunos casos terminando con un curso de análisis matemático, tal vez siguiendo el modelo francés aplicado a inicios del siglo XX donde trataron de ofrecer a los estudiantes textos de matemáticas superiores, que fueran comprensibles y didácticos que permitieran a las futuras generaciones de profesionales comprender los conceptos que se enseñan. Hoy, un siglo después se observa el fracaso de dicho modelo, que inconscientemente, quedó centrado en el paradigma formal-mecanicista donde se estudian axiomas, se demuestran teoremas, lemas y algunas veces proposiciones, desconociendo que, en innumerables temas, la mayoría de los estudiantes quedan sin comprenderlos, sin poderlos aplicar… en pocas palabras, sin desarrollar competencias STEM.

La historiografía mostró matemáticos europeos posteriores a la edad media, que notaron la falta de precisión y rigor en ese “nuevo análisis”, usando la terminología Newtoniana, y que posteriormente se llamaría el cálculo infinitesimal. Muestra que dedicaron sus vidas a buscar el rigor, la precisión en las matemáticas, lo que ellos desconocieron fue que esa búsqueda tendría como resultado, nuevas ramas de las matemáticas. La complejidad de tales construcciones derivó en un cuerpo sólido, bien formado que hoy conocemos como las Matemáticas Modernas. En esta presentación se comparten tópicos desarrollados en la antigüedad, en la edad media, posteriormente en los siglos XVIII, XIX y XX su evolución, su fundamentación y cómo este rigor que fue alcanzado extensiones al análisis matemático, la variable compleja, el análisis complejo, el análisis funcional, la geometría algebraica (que combina el álgebra abstracta, el álgebra conmutativa), la topología, la topología algebraica y análisis no estándar, entre tantas otras ramas que hoy conforman las Matemáticas Modernas.

¡Óptima lectura!

Prof. Dr. Enrique Mateus-Nieves

CAPÍTULO 1

Inicio del Cálculo

INICIO DEL CÁLCULO

El capítulo inicia identificando qué era para el mundo antiguo calcular. Se identificó que el cálculo es una actividad natural y primordial en el hombre que comenzó cuando el ser humano empezó a relacionar unas cosas con otro ordenando el pensamiento y el discurso. Situación que generó el cálculo lógico natural como una manera de razonamiento; fue el primer cálculo elemental del ser humano. El cálculo en sentido lógico-matemático apareció cuando el ser humano tomó conciencia de esta capacidad de razonar y la trató de formalizar. En dicha formalización los griegos juegan un papel destacado, comprendieron el cálculo como un algoritmo formalizado por las formas que utilizaron los geómetras jónicos, Eudoxo en particular, en el sentido de llegar por aproximación de restos cada vez más pequeños, a una medida de figuras curvas; o Diofanto, considerado el precursor del algebra. Escenario que los llevó a identificar el cálculo lógico, entendido como un algoritmo que permite cómoda y fácilmente inferir o deducir un enunciado verdadero a partir de otro u otros que se tienen como válidamente verdaderos. Entendieron el cálculo como una forma de razonamiento abstracto aplicado en todos los ámbitos del conocimiento; trabajo plasmado por Aristóteles, identificándolo como el primero en formalizar y simbolizar los tipos de razonamiento categóricos (silogismos), trabajo completado posteriormente por los estoicos y megáricos. El uso y aplicación de estos silogismos a situaciones cotidianas permitieron que se desarrollara el cálculo aritmético, entendido como una estructura formal que permitía abordar dichas situaciones de manera clara y coherente. Ambiente que desencadenó en la creación de la geometría plana, cuyo principal representante es Euclides; como una manera de entender la geografía de la naturaleza.

La combinación del cálculo aritmético con la geometría plana, como herramientas útiles para abordar la naturaleza, permitió enfrentar situaciones como las cuadraturas de la espiral y la parábola, contextos que motivaron la creación del método exhaustivo o por agotamiento, orígenes del *cálculo de infinitésimos*. Entorno que desencadenó en la necesidad de mirar un nuevo ente matemático que permitiera enfrentar situaciones cotidianas más complejas que estas herramientas no permitían abordar de manera óptima. Es así que el trabajo con el cálculo aritmético motivó la necesidad de simbolizar y crear estructuras bien formadas. La labor de búsqueda continuó y solo hasta el siglo IX de nuestra era, la evolución condujo al cálculo algebraico. Aquí es necesario recordar los aportes del mundo árabe. Se introduce en las matemáticas la palabra algoritmo1 como elemento del cálculo aritmético y que hoy siguen siendo usados universalmente. Dicho constructo fue fruto de un largo proceso histórico, donde jugó un papel importante las aportaciones de Muhammad ibn al-Juarismi en el siglo IX (MITCHELL, 1968, p. 23). Se introduce la palabra algoritmo en honor a este matemático musulmán, que vivió en Bagdad, actual Irak. El trabajo con algoritmos dio origen al cálculo algebraico, entendido como una estructura que permitió abordar y modelar situaciones de la naturaleza. Posteriormente la mezcla entre el cálculo algebraico con geometría, retomó la mezcla griega entre calculo aritmético con geometría, la completó y formalizó los inicios del cálculo infinitesimal que para esa época era abordado, al mirarlo desde la óptica de las Matemáticas Modernas, únicamente con elementos propios del cálculo integral.

ORÍGENES DEL CÁLCULO

La palabra cálculo proviene del latín *calculus*, que significa contar, proceso que en la antigüedad se hacía usando objetos materiales. Desde que el hombre ve la necesidad de contar, comienza la historia de las matemáticas y en particular del cálculo. Esta necesidad hizo que evolucionara la creación de sistemas de numeración, donde inicialmente, fueron utilizados objetos como: dedos de la mano, piernas, o piedras que servían para materializar y cuantificar. En otras palabras, servían para «contar», para cuantificar la cardinalidad de un conjunto.

La necesidad hizo forzosa la implementación de sistemas de numeración cada vez más avanzados y que pudieran resolver la mayoría de los problemas que se presentaban. Para ese momento de la historia, la civilización egipcia, llevaba la pauta con el avance en conocimientos matemáticos. Newman (1994) menciona que, según varios papiros escritos en esa época, los egipcios inventaron el primer sistema de numeración, basado en la implementación de jeroglíficos. El sistema de numeración egipcio, se basaba en sustituir los números clave (1, 10, 100...), con figuras (palos, lazos, dibujos de personas...), los demás números eran escritos por la superposición de estas mismas figuras, pero en clave. Este sistema fue la pauta para lo que hoy conocemos como «sistema romano». Civilizaciones como la babilónica, crearon otros sistemas de numeración al buscar solución al problema de contar objetos. Implementaron un método que denominaron «sexagesimal» que tenía la particularidad de escribir un mismo signo como la representación de varios números diferenciados por el enunciado del problema. Por otro lado, civilizaciones como China e India, utilizaron un sistema decimal jeroglífico, donde contemplaron e implementaron el número cero. El aporte principal de China se basó en la creación del «método del elemento celeste», desarrollado por Chou Shi Hié, con el que era posible la resolución de raíces enteras y racionales, e incluso aproximaciones decimales para ecuaciones de la forma $Pn_{(x)} = a_{4x4} + a_{3x3} + a_{2x2} + a_{1x1} + a_0$.

Para esta época, cada cultura había adoptado su propio sistema numérico, algunas de ellas aún utilizadas, ej. el sistema de numeración romano. No todos los sistemas numéricos mencionados eran funcionales. Sin embargo, el sistema numérico egipcio mostró avances que dieron como resultado la algebraización de dicho sistema, situación que resultó útil para la resolución a ecuaciones de tipo $x + ax = b$. En conjunción, la correcta implementación de la regla aritmética de cálculo implementada por los hindúes aumentó el conocimiento matemático de la época generando la creación de los números irracionales, aunque para la época no se conocían como tal, si ayudaron con la resolución de sistemas de ecuaciones de la forma $x^2 = 1 + y^2$. Con estos avances, en la antigua Mesopotamia se introduce el concepto de número inverso, se ofrecen soluciones a distintos problemas logarítmicos, e incluso, se oferta la solución a sistemas de ecuaciones de la forma $x + px = q$, y $x^2 + bx = c$. El avance alcanzado logró la creación de algoritmos para calcular sumas de progresiones. Se generaliza la geometría como una herramienta matemática útil, donde se establece el teorema de Pitágoras como uno de sus principales elementos de trabajo, aunque no como un teorema general ni en el sentido que los griegos lo usaron.

En Grecia se hizo popular la creación de escuelas, en donde los grandes pensadores de la época daban resolución a problemas populares de geometría, álgebra, y trigonometría. Los aportes de esta cultura a las matemáticas fueron de enorme magnitud. Por ejemplo, en geometría, se demostró el teorema de Pitágoras, hallaron el método para conseguir la serie indefinida de ternas de números pitagóricos que satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$. Incluso se trabajó en la resolución y demostración de la trisección de un ángulo, y la cuadratura de áreas acotadas por una curva. Situaciones que favorecieron el avance del número π y a la creación del método de exhausción (predecesor del cálculo de limites), creado por Eudoxo. El avance logrado por los griegos, en álgebra y geometría, condujo la creación de una nueva rama de las matemáticas: el *álgebra geométrica*. Esta nueva rama incluía el método de anexión de áreas, el conjunto de proposiciones geométricas que interpretaban cantidades algebraicas, y la expresión de la arista de un poliedro regular a través del diámetro de la circunferencia circunscrita. En Grecia, no se hicieron esperar los problemas que implicaban la construcción de límites, por lo que, en su época, Demócrito entre otros grandes pensadores intentaron ofrecer respuesta con la unificación de las matemáticas y la teoría filosófica atomicista[1]. Considerando de esta forma la primera concepción del método del límite.

El interés generalizado por las matemáticas griegas, hicieron que la historia considere a Grecia como la cuna de las matemáticas; no en vano el periodo comprendido entre los años 300 a. C y 200 a. C, fue considerado como la edad de oro de las matemáticas. Pasada esta época, Grecia deja de ser el centro evolutivo de las matemáticas por la multiplicidad de conflictos sociales y políticos que la alejan de esta ciencia. Ante dicha ausencia, es el imperio árabe quien toma las riendas de los avances matemáticos, dándole expansión, no sólo territorial sino intelectual. Los registros históricos muestran que el desarrollo de las matemáticas en los pueblos árabes comenzó a partir del siglo VIII. El imperio musulmán fue el primero en traducir todos los textos griegos al árabe. Por lo que se crean escuelas que traducen libros como el Brahmagupta, donde se explica de forma detallada el sistema de numeración hindú, sistema que luego fue conocido como «*el de Al-Khowarizmi*», que por deformaciones lingüísticas terminó como «*algoritmo*»[2] (CORMEN *et al*., 2009).

Los avances obtenidos para la época, alcanzan a enmarcar el concepto de límite, la introducción de los números racionales e irracionales, especialmente los reales positivos, y desarrollo en trigonometría con la creación de tablas trigonométricas de alta

[1] El atomismo: sistema filosófico que surgió en Grecia durante el siglo V a. C. y en la India entre los años 200 a. C.-100 a. C., según el cual el universo está constituido por combinaciones de pequeñas partículas indivisibles denominadas átomos, en griego significa que no se puede dividir (MUÑOZ; REGUERA, 1991, p. 89).

[2] Algoritmo: conjunto pre-escrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite realizar una actividad mediante pasos sucesivos que no generen dudas a quien deba realizar dicha actividad.

exactitud. De esta forma, el uso más común del término cálculo, era el lógico-matemático; donde el cálculo consistía en un procedimiento mecánico, o algorítmico, mediante el cual era posible conocer las consecuencias que se derivan de unos datos previamente conocidos debidamente formalizados y simbolizados. Bajo esta óptica, el cálculo era un sistema de símbolos no interpretados, es decir, sin significado alguno, en el que se establecen mediante reglas estrictas, las relaciones sintácticas entre los símbolos para la construcción de fórmulas bien formadas, así como las reglas que permiten transformar dichas expresiones en otras equivalentes. Entendiendo por equivalentes que ambas tienen siempre y de forma necesaria el mismo valor de verdad. Dichas transformaciones son solamente tautologías[3].

De ello, es posible inferir que, un cálculo consiste en:

- **Un conjunto de elementos primitivos**. Dichos elementos se pueden establecer por enumeración, o definidos por una propiedad tal que permita discernir sin duda alguna cuándo un elemento pertenece o no pertenece al sistema;
- **Un conjunto de reglas de formación** de "expresiones bien formadas" que permitan en todo momento establecer, sin forma de duda, cuándo una expresión pertenece al sistema y cuándo no;
- **Un conjunto de reglas de transformación** de expresiones, mediante las cuales partiendo de una expresión bien formada del cálculo podremos obtener una nueva expresión equivalente y bien formada que también pertenece al cálculo.

[3] Tautología: fórmula bien formada de un sistema de lógica proposicional que resulta verdadera para cualquier interpretación; es decir, para cualquier asignación de valores de verdad que se haga a sus fórmulas atómicas. Cormen, et al., (2009).

Cuando en un cálculo así definido se establecen expresiones determinadas como verdades primitivas o axiomas, se dice que es un *sistema formal axiomático*. De ahí que, si un cálculo así definido, cumple al mismo tiempo las tres condiciones enumeradas a continuación, se puede decir que se trata de un *Cálculo Perfecto*:

- **Es consistente**: no es posible que, dada una expresión bien formada del sistema, f, y su negación, $-f$, sean ambos teoremas del sistema. No puede haber contradicción entre las expresiones del sistema;
- **Decidible**: dada cualquier expresión bien formada del sistema es posible encontrar un método que permita decidir mediante una serie finita de operaciones, si dicha expresión es o no es un teorema del sistema;
- **Completo**: dada cualquier expresión bien formada del sistema, se puede establecer la demostración matemática o prueba de que es un teorema del sistema. Hoy día, vemos que la misma lógica-matemática ha demostrado que tal sistema de cálculo perfecto "no es posible" (para los interesados, véase el Teorema de Gödel).

El cálculo lógico

Entendemos aquí por cálculo lógico, un algoritmo que permite cómoda y fácilmente inferir o deducir un enunciado verdadero a partir de otro u otros que se tienen como válidamente verdaderos. La inferencia[4] o deducción[5] es una operación lógica que consiste en obtener un enunciado[6] como conclusión a partir de otro(s) (premisa(s) mediante la aplicación de reglas de inferencia[7]. Decimos que alguien infiere, o deduce, "*T*" de "*R*" si acepta que, si "*R*" tiene valor de verdad *V*, entonces, necesariamente, "*T*" tiene valor de verdad *V*. La lógica, como ciencia formal, se ocupa de analizar y sistematizar dichas leyes, fundamentarlas y convertirlas en reglas que permiten la transformación de unos enunciados – premisas - en otros – conclusiones - con objeto de convertir las operaciones en un algoritmo riguroso y eficaz, que garantiza que, dada la verdad de las premisas, la conclusión es necesariamente verdadera. Al aplicar las reglas de este cálculo lógico a los enunciados que forman un argumento mediante la simbolización adecuada de fórmulas o expresiones bien formadas (EBF) construimos un modelo o sistema deductivo.

Las siguientes reglas conforman una sistematización de un cálculo de deducción natural:

I. Una letra enunciativa (con o sin subíndice) es una EBF;

II. Si A es una EBF, ¬ A también lo es;

III. Si A es una EBF y B también, entonces A B; A B; A B; A B, también lo son;

IV. Ninguna expresión es una fórmula del Cálculo sino en virtud de *i*, *ii*, *iii*.

---

[4] Inferencia: deducción de una cosa a partir de otra, conclusión (CORMEN *et al*., 2009).

[5] Deducción: método de razonamiento que parte de conceptos generales o principios universales para llegar a conclusiones particulares. La deducción presupone el pensamiento hipotético (CORMEN *et al*., 2009).

[6] Enunciado: conjunto de palabras con las que se expone o plantea un problema matemático o de cualquier otro tipo de razonamiento deductivo (CORMEN *et al*., 2009).

[7] En lógica, regla de inferencia: esquema para construir inferencias válidas. Estos esquemas establecen relaciones sintácticas entre un conjunto de fórmulas llamados premisas y una aserción llamada conclusión (CORMEN *et al*., 2009).

Notas:

- A, B, ... con mayúsculas están utilizadas como metalenguajes[8] en el que cada variable expresa cualquier proposición, atómica (p, q, r, s …) o molecular (p /\ q), (p \ /q) ...
- A, B, ... son símbolos que significan variables;
- ¬, ∧, ∨, →, ↔, son símbolos constantes;
- Existen diversas formas de simbolización.

Todo cálculo de deducción natural debe cumplir al menos las siguientes dos reglas para la formación de fórmulas:

a) **Regla de sustitución** (R.T.1). Dada una tesis EBF del cálculo, en la que aparecen variables de enunciados, el resultado de sustituir una, algunas o todas esas variables por expresiones bien formadas (EBF) del cálculo, será también una tesis EBF del cálculo. Y ello con una única restricción, si bien muy importante: cada variable ha de ser sustituida siempre que aparece y siempre por el mismo sustituto.

Ejemplo:

1		Trasformación
2	$A \vee r \rightarrow B$	donde $A = (p \wedge q)$; y $B = (t \vee s)$
3	$C \rightarrow B$	donde $C = A \vee r$

[8] Metalenguaje: lenguaje natural o formal que se usa para explicar o hablar del lenguaje mismo o de una lengua: las gramáticas formales son metalenguajes (RÍBNIKOV, 1987, p. 20).

O viceversa:

1	$C \rightarrow B$	Trasformación
2	$A \vee r \rightarrow B$	donde $A \vee r = C$
3	$[(p \wedge q) \vee r] \rightarrow t \vee s$	donde $(p \wedge q) = A$; y $(t \vee s) = B$

b) **Regla de separación** (R.T.2). Si X es una tesis EBF del sistema y lo es también X Y, entonces Y es una tesis EBF del Sistema.

Todo calculo lógico debe contemplar unos esquemas de inferencia[9]. Sobre la base de estas dos reglas, siempre podremos reducir un argumento cualquiera a la forma: $[A \wedge B \wedge \cdots \wedge N] \rightarrow Y$, constituye un esquema de inferencia en el que una vez conocida la verdad de cada una de las premisas A, B $\cdots N$, y, por tanto, de su producto, podemos obtener la conclusión Y con valor de verdad V, siempre y cuando, dicho esquema de inferencia sea una ley lógica, es decir su tabla de verdad[11] nos muestre que es una tautología; en la que por la regla de separación, es posible concluir Y de forma independiente como verdad. Dada la poca operatividad de las tablas de verdad, el cálculo se construye como una cadena deductiva aplicando a las premisas o a los teoremas deducidos, las leyes lógicas utilizadas como reglas de transformación; que lo exponen como un cálculo lógico.

El cálculo lógico es útil porque puede tener aplicaciones, en las que el lenguaje natural debe convertirse en un modelo de ese cálculo lógico. Pero, ¿en qué consisten o cómo se hacen tales

[9] Una inferencia es una evaluación que realiza la mente entre expresiones bien formadas de un lenguaje (EBF) que, al ser relacionadas intelectualmente como abstracción, permiten trazar una línea lógica de condición o implicación lógica entre las diferentes EBF. De esta forma, partiendo de la verdad o falsedad posible (como hipótesis) o conocida (como argumento) de alguna o algunas de ellas, puede deducirse la verdad o falsedad de alguna o algunas de las otras EBF (MUÑOZ; REGUERA, 1991, p. 96).

aplicaciones? Se puede considerar que el lenguaje natural es un modelo de *C* si podemos someterlo, es decir, aplicarle una correspondencia en *C*. Para ello es necesario someter al lenguaje natural a un proceso de formalización de tal manera que sea posible reducir las expresiones lingüísticas del lenguaje natural a estructuras bien formadas de un cálculo mediante reglas estrictas manteniendo el sentido de verdad lógica de dichas expresiones del lenguaje natural. Las diversas formas en que se trata las expresiones lingüísticas formalizadas como proposiciones lógicas dan lugar a sistemas diversos de formalización y cálculo donde es necesario considerar:

- **Cálculo proposicional o cálculo de enunciados**: Cuando se toma la oración simple significativa del lenguaje natural con posible valor de verdad o falsedad como una proposición atómica[10], como un todo sin analizar;
- **Cálculo como lógica de clases**: Cuando se toma la oración simple significativa del lenguaje natural con posible valor de verdad o falsedad, como resultado del análisis de la oración; como una relación de individuos o posibles individuos que poseen o no una propiedad común determinada; como pertenecientes o no a una clase natural o a un conjunto; como individuos;
- **Cálculo de predicados o cuantificacional**: Cuando se toma la oración simple significativa del lenguaje natural con posible valor de verdad o falsedad como resultado del análisis de la misma de forma que una posible función predicativa (P), se predica de unos posibles sujetos variables (*x*) [tomados en toda su posible extensión: (todos los *x*); o referente a algunos

[10] Proposición que expresa que una cosa tiene una determinada propiedad o que unas cosas tienen una determinada relación.

indeterminados: (algunos *x*)], o de una constante individual existente (*a*);

- **Cálculo como lógica de relaciones**: Cuando se toma la oración simple significativa con posible valor de verdad propio, verdadero o falso, como resultado del análisis de la oración, como una relación "R" que se establece entre un sujeto y un predicado.

La simbolización y formación de estructuras bien formadas en cada uno de esos cálculos, así como las reglas de cálculo es lo que trata el cálculo lógico. Las dos acepciones del cálculo (la general y la restringida: Cálculo como razonamiento y cálculo lógico-matemático respectivamente) están íntimamente ligadas. De ahí que, el cálculo es una actividad natural y primordial en el hombre, que comienza en el mismo momento en que empieza a relacionar unas cosas con otras en un pensamiento o discurso. El cálculo lógico natural como razonamiento es el primer cálculo elemental del ser humano. El cálculo en sentido lógico-matemático aparece cuando se toma conciencia de esta capacidad de razonar y trata de formalizarse, donde es posible distinguir dos tipos de operaciones:

1) Operaciones orientadas hacia la consecución de un fin, como prever, programar, conjeturar, estimar, precaver, prevenir, proyectar, configurar, entre otras, que incluyen en cada caso, una serie complejas de actividades y habilidades tanto de pensamiento como de conducta. En conjunto, dichas actividades adquieren la forma de argumento[11] o razones que justifican una finalidad práctica o cognoscitiva;

[11] La palabra argumento (del latín argumentum): prueba o razón para justificar algo como verdad o como acción razonable; expresión oral o escrita de un razonamiento. La cualidad fundamental de un argumento es la consistencia y coherencia; entendiendo por el hecho que el contenido de la expresión, discurso u obra adquiera sentido o

2) Operaciones formales como algoritmo que se aplica bien directamente a los datos conocidos o a los esquemas simbólicos de la interpretación lógico-matemática de dichos datos. Las posibles conclusiones, inferencias o deducciones de dicho algoritmo son el resultado de la aplicación de reglas estrictamente establecidas de antemano. Resultados que pueden ser: conclusión de un proceso de razonamiento, resultado aplicable directamente a los datos iniciales (resolución de problemas); modelo de relaciones previamente establecidas como teoría científica y significativa respecto a determinadas realidades (Creación de modelos científicos); mero juego formal simbólico de fundamentación, creación y aplicación de las reglas que constituyen el sistema formal del algoritmo (Cálculo lógico-matemático, propiamente dicho).

Dada la importancia que históricamente ha adquirido la actividad lógico-matemática en la cultura humana, la palabra cálculo casi queda restringida a un solo tipo: al cálculo matemático. Pues en algunas instituciones y personas se llama “cálculo” a una asignatura específica de cálculo matemático, como puede ser el cálculo infinitesimal desde sus dos ramas: diferencial, e integral.

El cálculo algebraico

Se ocupa de resolver ecuaciones, utiliza símbolos en vez de números específicos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos. Conforma lo que regularmente se conoce

---

significación que se dirige al interlocutor con finalidades diferentes. Como esquema lógico-formal: consistencia y coherencia con un sistema que no admite contradicción. Como función lógico-matemática: consistencia y coherencia con el hecho de “ser algo real” frente a una posibilidad lógica que define un mundo o una situación posible en un determinado marco teórico que justifica la función (JANSANA, 1990).

como el álgebra moderna, que usa el álgebra clásica para centrar su atención en las estructuras matemáticas. Se considera al álgebra moderna como un conjunto de objetos con reglas que los conectan o relacionan entre sí. De ahí que, algunos consideran al álgebra como el idioma de las matemáticas. La historia muestra la génesis del álgebra en el antiguo Egipto y Babilonia, al resolver: ecuaciones lineales ($ax = b$), cuadráticas ($ax^2 + bx = c$), ecuaciones indeterminadas ($x^2 + y^2 = z^2$) y con varias incógnitas.

Herón[12] y Diofanto[13], matemáticos alejandrinos, continuaron con la tradición de Egipto y Babilonia. El libro *Las aritméticas* de Diofanto presenta soluciones para ecuaciones indeterminadas. Este método de resolución de ecuaciones encontró acogida en el mundo islámico, quienes lo llamarón "ciencia de reducción y equilibrio".

El Cálculo Infinitesimal

El cálculo infinitesimal (C. Inf) es sin duda, la herramienta más potente y eficaz para el estudio de la naturaleza. El C. Inf, llamado por brevedad "*cálculo*", tiene su origen en la antigua geometría griega. Demócrito[14] lo usó para calcular el volumen de pirámides y conos considerándolos formados por un número infinito de secciones de grosor infinitesimal (infinitamente pequeño). Solo hasta la edad media con los trabajos de Newton y Leibniz se mostró que el C. Inf tiene dos caras: el cálculo diferencial y el cálculo

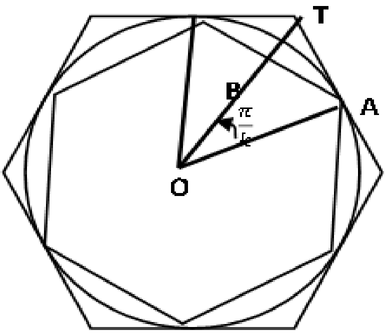
[12]Herón: ingeniero y matemático griego considerado uno de los científicos e inventores más grandes de la antigüedad (RESEARCH MACHINES plc., 2004).

[13] Diofanto: matemático griego, considerado "el padre del álgebra". (RESEARCH MACHINES plc., 2004, p. 625).

[14] Demócrito de Abdera. 460 al 370 a. C., filósofo griego presocrático y matemático. Desarrolló la teoría atómica del universo, concebida por su mentor el filósofo Leucipo. Esta teoría, no apoya sus postulados mediante experimentos, sino que se explica mediante razonamientos lógicos. La teoría atomista de Demócrito y Leucipo se puede esquematizar así: Los átomos son eternos, indivisibles, homogéneos, incompresibles e invisibles. Los átomos se diferencian solo en forma y tamaño, pero no por cualidades internas.

integral, temas que se abordara al detalle posteriormente en este manuscrito. En ambos cálculos prima un oscuro interior donde, como "demonios", moran los infinitos grandes y pequeños. Arquímedes[15] y Eudoxo[16] en la Grecia antigua fueron quienes utilizaron el "*método de agotamiento*" o *exhaución* para encontrar el área de un círculo con la exactitud finita requerida mediante el uso de polígonos regulares inscritos cada vez con mayor número de lados (Figura 1).

Figura 1 - Diagrama de Arquímedes



$$OA = 1$$

$$AB = sen\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$AT = tan\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$Donde\ \mathbf{k} = 3x\ 2^{\pi-1}$$

Fuente: Elaboración propia. Base de datos: Mateus-Nieves (2015, p. 07).

[15] Arquímedes de Siracusa. Matemático, físico, ingeniero y astrónomo griego. Usó el método exhaustivo para calcular el área bajo el arco de una parábola con la sumatoria de una serie infinita, dio una aproximación muy precisa del número π. Definió la espiral que lleva su nombre, dio fórmulas para los volúmenes de las superficies de revolución y un ingenioso sistema para expresar números muy largos (RÍBNIKOV, 1987, p. 32).

[16] Eudoxo de Cnidos. Filósofo, astrónomo, matemático y médico griego, discípulo de Platón. Fue el primero en plantear un modelo planetario basado en una modelización matemática, por lo que se le considera el padre de la astronomía matemática. Su trabajo sobre la teoría de la proporción denota una amplia comprensión de los números y permite el tratamiento de cantidades continuas, no únicamente de números enteros o números racionales. Cuando esta teoría fue rescatada por Tartaglia en el siglo XVI, se convirtió en la base de cuantitativas obras de ciencia durante un siglo, hasta que fue sustituida por los métodos algebraicos de Descartes. Eudoxo demostró que el volumen de una pirámide es la tercera parte del de un prisma de su misma base y altura; y que el volumen de un cono es la tercera parte del de un cilindro de su misma base y altura, teoremas ya intuidos por Demócrito. Para demostrarlos elaboró el llamado *método de exhaución*, antecedente del cálculo integral, usado para calcular áreas y volúmenes. Posteriormente, este método fue utilizado por Arquímedes. El trabajo de ambos como precursores del cálculo fue únicamente superado en sofisticación y rigor matemático por Newton y Leibniz en la edad media.

Pappus[17] de Alejandría hizo contribuciones sobresalientes en este ámbito. Sin embargo, las dificultades para trabajar con "números irracionales" y las paradojas de Zenón[18] impidieron formular una teoría sistemática del cálculo en el periodo antiguo. Solo siglos más tarde, estas ideas fueron utilizadas por Isaac Newton y Gottfried Leibniz, en los albores del surgimiento del cálculo moderno. Zenón alrededor de 450 a. C., planteó una serie de problemas basados en el infinito. Por ejemplo, argumentó que el movimiento es imposible: Si un cuerpo se mueve de A a B entonces, antes de llegar a B pasa por el punto medio B_1 entre AB. Ahora bien, para llegar a B_1 debe primero pasar por el punto medio B_2 entre AB_1. Continuando con este argumento se puede ver que A debe moverse a través de un número infinito de distancias y por lo tanto no puede moverse.

Leucippo[19], Demócrito y Antifon[20] hicieron contribuciones al método exhaustivo griego al que Eudoxo dio una base científica alrededor de 370 a. C. El método se llama exhaustivo ya que considera las áreas medidas como expandiéndolas de tal manera que

---

[17] Papo, o Pappo de Alejandría, matemático griego. Escribió comentarios a los *Elementos* de Euclides y al *Almagesto* de Ptolomeo (SAMSÓ, 1971, p. 385).

[18] Zenón de Elea, filósofo griego conocido por sus paradojas o aporías, especialmente aquellas que niegan la existencia del movimiento o la pluralidad del ser. Intenta probar que el ser tiene que ser homogéneo, único y, en consecuencia, que el espacio no está formado por elementos discontinuos, sino que el cosmos o universo entero es una única unidad. Sus aporías están diseñadas bajo los siguientes ejes argumentativos: 1) Contra la pluralidad como estructura de lo real. 2) Contra la validez del espacio. 3) Contra la realidad del movimiento. 4) Contra la realidad del transcurrir del tiempo. Aplicando este esquema se le ha considerado el primero en utilizar la demostración llamada ad absurdum (*reducción al absurdo*), que toma por hipótesis lo contrario a lo que se considera cierto y muestra las incongruencias que se derivan de una consideración de esto como verdadero, obligando al interlocutor a rechazar las premisas y a aceptar las tesis opuestas, que eran las que se querían demostrar en un principio. Los razonamientos de Zenón constituyen el testimonio más antiguo que se conserva del pensamiento infinitesimal desarrollado muchos siglos después en la aplicación del cálculo infinitesimal de la mano de Leibniz y Newton en 1666 (BOYER, 2010).

[19] Leucipo, filósofo griego siglo V a. C., se le atribuye la fundación del atomismo. Discípulo de Parménides y de Zenón de Elea. Entre sus obras está la ordenación del cosmos. Fue maestro de Demócrito, a los dos se les atribuye la fundación del atomismo mecanicista, según el cual la realidad está formada tanto por partículas infinitas, indivisibles, de formas variadas y siempre en movimiento, los átomos (que no puede ser dividido), como por el vacío. En respuesta a Parménides, afirma que existe tanto el ser como el no-ser: el primero está representado por los átomos y el segundo por el vacío, «que existe no menos que el ser», siendo imprescindible para que exista movimiento.

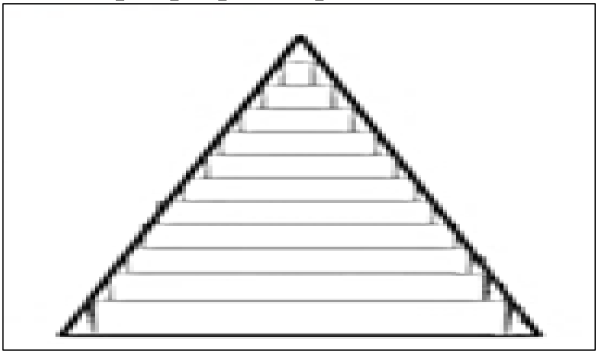
[20] Antifonte o Antifón, filósofo y matemático griego. Hay cierta controversia sobre si este Antifonte del demo ateniense de Ramnunte (Ática) es o no el mismo que *Antifonte el sofista*, que vivió en Atenas probablemente en las últimas dos décadas del siglo V a. C. (REDONDO *et al*., 1991).

cubran más y más del área requerida. Sin embargo, Arquímedes, alrededor de 225 a. C. hizo uno de las contribuciones griegas más significativas, demostrar que el área de un segmento de parábola es $\frac{4}{3}$ del área del triángulo con las mismas base y vértice, y es igual a $\frac{2}{3}$ del área del paralelogramo circunscrito. Arquímedes construyó una secuencia infinita de triángulos empezando con uno de área A y añadiendo continuamente más triángulos entre los existentes y la parábola para obtener áreas $A, A+\frac{A}{4}, A+\frac{A}{4}+\frac{A}{16}, A+\frac{A}{4}+\frac{A}{16}+\frac{A}{64}\cdots$. Por tanto, el área del segmento de la parábola es,

$$A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)=\frac{4}{3}A.$$

De esta forma, la escuela de Atenas abordó tres problemas relacionados con la medida: la duplicación del cubo, la trisección de un ángulo y la cuadratura del círculo, todos ellos en un contexto netamente intra matemático. Como ya se mencionó anteriormente, Eudoxo crea el método de exhausción, inscribiendo una sucesión de polígonos en la figura no rectilínea que se quiere cuadrar, escoge la sucesión de tal manera que las diferencias entre la medida de la figura a cuadrar y la medida de cada polígono forman una sucesión que satisface la hipótesis de la anterior proposición. Euclides, usa el método propuesto por Eudoxo, realiza medidas en las que compara magnitudes conocidas con otras desconocidas, respetando el principio de homogeneidad (unidimensional: compara un segmento con otro tomado como unidad referencial. Bidimensional: encuentra un cuadrado equivalente a una figura plana cualquiera. Tridimensional: halla un cubo equivalente a un sólido cualquiera). En las dos primeras proposiciones del libro XII, Euclides expone la idea de descomposición-recomposición de figuras planas rectilíneas para obtener su cuadratura. Arquímedes considera a Demócrito como el primero, que, siguiendo los planteamientos euclídeos, estableció correctamente la fórmula del volumen de un cono o de una pirámide “considerando estos sólidos como si estuvieran formados por innumerables capas paralelas” (NEWMAN 1994, p. 22) Figura 2.

Figura 2 - Método de las capas propuesto por Demócrito



Fuente: Elaboración propia. Basada en: Mateus-Nieves; Font (2021, p. 08).

Arquímedes conservando esta forma de razonamiento, usó demostraciones estrictas para encontrar áreas, volúmenes, centros de gravedad de curvas, superficies, círculos, esferas, cónicas y espirales. Enfocando la medición de magnitudes por comparación perfecciona el método exhaustivo. Combinó lo geométrico con las leyes de la mecánica y del método exhaustivo, proceso que dio lugar a los indivisibles e infinitesimales respectivamente. Posicionó el método exhaustivo como una aproximación entre figuras geométricas de medida conocida, inscritas y circunscritas, que acotan la figura que se quiere conocer, de manera que la diferencia entre unas y otras sea tan pequeña que se consideren equivalentes.

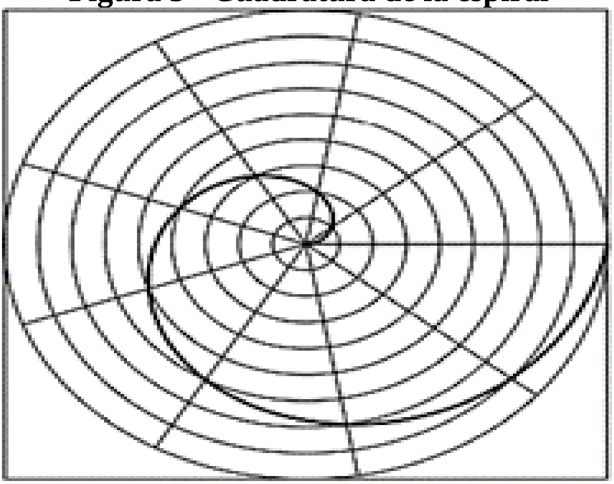
Proceso que permite inferir el origen de la *integral* en los trabajos de Demócrito.

La cuadratura de la espiral

Al afinar la lupa en la historiografía realizada, se encuentra que este tipo de trabajos en los antiguos griegos, desde procesos netamente geométricos, usaron implícitamente «*la integral*» como una operación, que, por las limitaciones teóricas de la época, era imposible determinar el tipo de resultado encontrado. Esto es, si observamos en términos actuales, reflejaría el uso implícito de la «*integral indefinida*», pero los resultados encontrados mostraban una medida, un numero; que, visto en términos actuales, es el equivalente a la aplicación de una «*integral definida*», y, en ocasiones, la de una «*integral impropia*». Por ejemplo, en el caso de la cuadratura de la espiral de Arquímedes ─ curva que describe un punto material que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una semirrecta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de su extremo ─ descrita al detalle posteriormente, se parte de una sucesión de infinitas capas que cubren dicha área y, si bien el resultado es un número (que se consideraba una medida), dicha sucesión de capas, con la mirada actual, se puede entender como una sucesión de funciones que convergen a otra función. Las particiones planteadas por Riemann para el dominio de una función y que dieron origen a su integral, generaron el siguiente avance en la evolución histórica del cálculo, al introducir las funciones discontinuas y extender el proceso de integración a este tipo de funciones, dieron significativos resultados sobre los conceptos primarios de longitud, área y volumen de conjuntos. O a las particiones planteadas por Lebesgue para el rango de una función no Riemann integrable.

Ahora bien, encontramos que la aplicación de esta noción implícita de integral, hoy es conocida como integral indefinida, pero los antiguos griegos la usaban para obtener una medida. Procedimiento que, traducido a las notaciones actuales, es prácticamente el mismo de la integral de Riemann, cuya ecuación polar es de la forma $\rho = a\upsilon$, donde a > 0 y es una constante. Se ilustra como ejemplo la forma en que Arquímedes usa el siguiente teorema: *El área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito* (Figura 3).

Figura 3 - Cuadratura de la espiral



Fuente: Elaboración propia. Basada en: Mateus-Nieves; Font (2021, p. 08).

Demostración. Se considera una espiral con ecuación polar $\rho = a\upsilon$, se calcula el área cuando el ángulo polar varía desde 0 a 2π, es decir, da la primera vuelta de la espiral. El radio del círculo circunscrito es $2\pi a$. Para ello divide este círculo en sectores de amplitud $\upsilon = \frac{2\pi}{n}$, desde $\upsilon = \frac{2\pi k}{n}$ hasta $\upsilon = \frac{2\pi(k+1)}{n}$ para $k =$

$0, 1, \cdots, n-1$. En cada sector examina el arco de espiral que queda dentro del mismo y acota el área correspondiente a dicho arco de espiral entre las áreas de dos sectores circulares. El área de sector circular más grande inscrito en cada arco de espiral es:

$$\left(\frac{2a\pi k}{n}\right) \cdot 2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

y el área de sector circular más pequeño circunscrito a cada arco de espiral es:

$2(a2\pi)\left(\frac{k+1}{n}\right) \cdot \frac{2\pi}{n}$. (Pérez, 2013, p. 140).

En notación moderna, el área S de la espiral verifica que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2 \frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 < S < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2 \frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Arquímedes conocía que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

usa este resultado y escribe la desigualdad anterior en la forma

$$4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) < S < 4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

toma $k = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$, una tercera parte del área del círculo circunscrito. Resta k en la desigualdad anterior y hace operaciones sencillas, obteniendo:

$$K\left(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right) < S - K < K\left(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right);$$

como $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, llega a

$$-\frac{2k}{n} < S - K < \frac{2K}{n}.$$

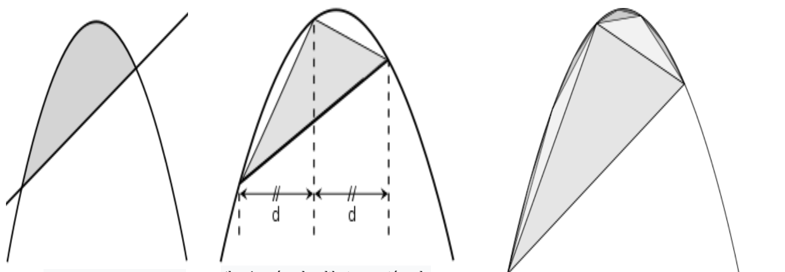
usando el axioma de Arquímedes, se concluye que $S = K$. Observamos que se parte de un presupuesto implícito, indefinido, cuyo resultado es un número (implícitamente se trata del resultado, que en términos actuales corresponde a calcular una integral definida), lo que ratifica el origen y uso implícito de integrales.

La cuadratura de la Parábola

Arquímedes probó que el área definida por una parábola y una línea recta equivalía exactamente a cuatro tercios, el área del correspondiente triángulo inscrito, tal y como se puede observar en la figura 4c. Para obtener ese resultado, desarrolló una serie geométrica infinita, (ver Figura 4a, 4b, 4c), con una razón común de $\frac{1}{4}$, así:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = 1 + 4^{-1} + 4^{-2} + \cdots = \frac{4}{3}$$

Figura 4 - Cuadratura de la Parábola de Arquímedes



4a. Segmento parabólico.

4b. Arquímedes dibuja un triángulo inscrito para el segmento parabólico dado

4c. Disección de Arquímedes de un segmento de parábola en un número arbitrario de triángulos.

Fuente: Elaboración propia.

Arquímedes demostró que él área del segmento parabólico de la figura superior (4a) es igual a $\frac{4}{3}$ de la del triángulo inscrito de la figura inferior (4b). Este fue el primer ejemplo conocido de una suma de una serie infinita, usando el método exhaustivo para encontrar la aproximación al área de un círculo. Lo que permite identificar un ejemplo temprano de integración cuyo resultado llevó a valores aproximados de π. Entre las muchas "*integraciones*" de Arquímedes estaban: el volumen y superficie de una esfera; volumen y área de un cono; área de una elipse; volumen de cualquier segmento de un paraboloide de revolución y un segmento de un hiperboloide de revolución. No hubo más progresos hasta el siglo XVI cuando la mecánica empezó a llevar a los matemáticos a examinar problemas como el de los centros de gravedad.

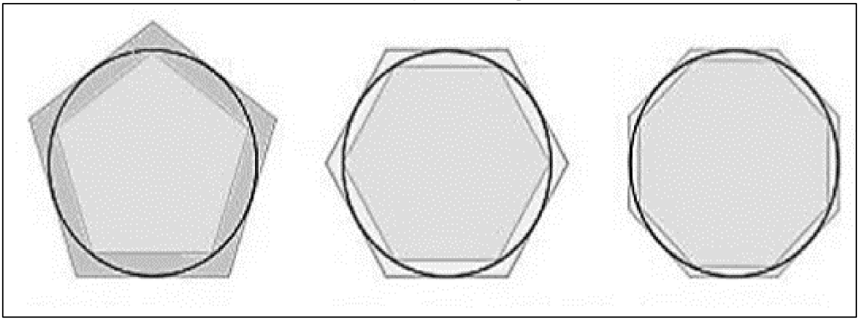
Método exhaustivo o por agotamiento

El legado de los griegos fue la creación del método exhaustivo, como un procedimiento geométrico-matemático de aproximación a un resultado, con el cual el grado de precisión aumenta a medida que avanza el cálculo. Este método también es conocido como: método por agotamiento, método de exhausción o método de exhausción. El término proviene del inglés *method of exhaustion* (que traducido es "método por agotamiento", a pesar que la Real Academia Española no ha aceptado aún el sustantivo "exhausción", a pesar de reconocer el adjetivo "exhausto. En inglés "exhaustion" que proviene del latín exhaustiō (agotamiento)). Este método lo utilizó Antifonte, 430 a. C. con el que trató de determinar el área del círculo inscribiendo en él un mayor número de triángulos, cada vez más pequeños, hasta que su área se colmara. La aplicación más clara del método exhaustivo o por agotamiento es el cálculo de la longitud de una circunferencia efectuado por Arquímedes, para ello usó dos estrategias:

1. El método de agotamiento, inscribiendo polígonos regulares en una circunferencia de radio unitario, y
2. El método de compresión, circunscribiendo polígonos a la circunferencia. De este modo, al aumentar el número de lados de los polígonos, las figuras tenderán a acercarse a la forma de la

circunferencia, tanto que pudo obtener una medida bastante precisa del número π, Figura 5.

Figura 5 - Método exhaustivo empleado por Arquímedes para hallar el área del círculo y la longitud de la circunferencia



Fuente: Elaboración propia.

En este proceso está descrito en libro de Arquímedes titulado "*El Método*", obra que llegó a ser base de los conceptos que en el siglo XVII permitieron a Newton y a Leibniz unificar el cálculo llegando a distinguir entre diferencial e integral como elementos complementarios uno del otro. Esta historiografía identificó a los filósofo-matemáticos griegos como los preocupados por determinar qué es el *infinito*. Para ellos apareció de dos maneras: lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, desde situaciones particulares como la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado, o la paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga. Aristóteles[21] intentó regularlos, formalizando y simbolizando los tipos de razonamientos categóricos (silogismos)[22]. Trabajo que fue

[21] Aristóteles filósofo, lógico y científico griego cuyas ideas ejercieron influencia sobre la historia intelectual de Occidente por más de dos milenios (SAMSÓ, 1971, p. 388).

[22] Silogismo: forma de razonamiento deductivo que consta de dos proposiciones como premisas y otra como conclusión, siendo la última una inferencia necesariamente deductiva de las otras dos (REDONDO *et al*., 1991).

completado por los estoicos[23] y los megáricos[24] con la Escolástica[25]. Boyer (1949, p. 25) plantea que, Aristóteles prohibió el infinito en acto "no es posible que el infinito exista como ser en acto o como una substancia y un principio", pero añadió "es claro que la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles" de manera que el infinito "existe potencialmente [...] es por adición o división". Así la regulación aristotélica del infinito no permite considerar un segmento como una colección de puntos alineados, pero sí permite dividir este segmento por la mitad tantas veces como se quiera. Lo que permite inferir que los antecedentes de procedimiento de cálculo, como algoritmo, se encuentra entre los que utilizaron los geómetras griegos, como ejemplo: Eudoxo, en el sentido de llegar por aproximación de restos cada vez más pequeños a una medida de figuras curvas. De esta forma se identifica a Eudoxo, discípulo de Platón y contemporáneo de Aristóteles, como el primer matemático que hizo uso "racional" del infinito en matemáticas. Postuló que toda magnitud finita puede ser agotada mediante la substracción de una cantidad determinada, planteamiento que dio origen a lo que hoy se conoce como el principio de Arquímedes, que toma prestado a Eudoxo y que sirvió a aquel para superar la primera crisis de las Matemáticas debida al descubrimiento de los irracionales.

[23] Estoicismo, uno de los movimientos filosóficos fundado por Zenón de Citio en el 301 a. C., dentro del periodo helenístico adquirió mayor importancia y difusión por todo el mundo greco-romano. Su período de preeminencia va del siglo III a. C. hasta finales del siglo II d. C., coincidió con la descomposición social del Imperio romano y el auge del cristianismo

[24] Escuela megárica: escuela filosófica del siglo IV a. C., fundada por Euclides de Megara, discípulo de Sócrates (REDONDO *et al*., 1991).

[25] Escolástica: movimiento teológico y filosófico que intentó utilizar la filosofía grecolatina clásica para comprender la revelación religiosa del cristianismo. Fue la corriente teológico-filosófica dominante del pensamiento medieval, tras la patrística de la Antigüedad tardía, se basó en la coordinación entre fe y razón, que en cualquier caso siempre suponía una clara subordinación de la razón a la fe (REDONDO *et al*., 1991).

CAPÍTULO 2

El Cálculo en la Edad Media

EL CÁLCULO EN LA EDAD MEDIA

No obstante, aunque el método de Arquímedes se perdió y solo quedaron algunos vestigios que permiten inferir el uso del infinito como herramienta útil para abordar situaciones que hoy, en las matemáticas modernas, son propias del cálculo integral; se puede afirmar sin lugar a dudas, fue Arquímedes el precursor del cálculo integral, aunque al momento de la edad media en que se formaliza el cálculo infinitesimal en sus dos versiones (diferencial e integral), no se le atribuye ninguna repercusión en dicho descubrimiento. La idea del siracusano fue considerar las áreas como una colección necesariamente infinita de segmentos. La humanidad hubo de esperar 2000 años hasta que la revolución científica en la edad media, supuso una ruptura con las formas de pensar, estudiar y vincularse con la naturaleza que dominaron casi absolutamente a Europa entre los siglos V y XV. Esta ruptura y salto en la historia del conocimiento estuvieron precedidos por importantes transformaciones que se vivieron durante los siglos XV y XVI con el Renacimiento y la Reforma Protestante.

LOS APORTES DE LUCA VALERIO, STEVIN, GALILEI, ROVERBAL Y KEPLER

Luca Valerio[26], basado en el principio de Arquímedes, desarrolló formas de encontrar volúmenes y centros de gravedad de cuerpos sólidos. Enseñó matemáticas y ética en la universidad Sapienza de Roma, mantuvo correspondencia con Galileo Galilei a quien conoció en Pisa en 1584; posteriormente ante el llamado de

[26] Luca Valerio (1553-1618), matemático italiano.

Galilei a la inquisición, hace que Valerio termine toda correspondencia con Galileo y renuncie a la *Accademia dei Lincei*. Los miembros de la Academia consideraron que las acciones de Valerio se alineaban con los oponentes de Galileo y acusaron a la propia Academia de cometer un delito. La obra de Valerio *De centro gravitatis solidorum*, escrita en 1603, aplicaba los métodos de Arquímedes para hallar volúmenes y centros de gravedad de cuerpos sólidos, en particular sólidos de rotación y sus segmentos determinados en los conoides por planos paralelos a la base, y también la cuadratura de la parábola por un método diferente al de Arquímedes. Utilizó ideas tempranas sobre el cociente de límites, demostrando que, si Si $\lim x = a, \lim y = b$ y si $\frac{x}{y} = c, c = constante$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y} = \frac{x}{y} = c$. Que ahora se conoce como principio de Cavalieri, aunque el trabajo de Valerio es muy anterior al de Bonaventura Cavalieri. Al respecto, Berggren (1982, p. 25) en su reseña escribe:

> Cuando Luca Valerio publicó su "De centro gravitatis" en 1603, afirmó que estaba abriendo lo que él llamaba un "camino real" para la investigación de los centros de gravedad de las figuras sólidas. Aunque el tema ya había sido tratado con anterioridad por sus predecesores inmediatos, Commandino y Maurolico, Valerio consideraba, y los autores de este estudio están de acuerdo, que su obra marcaba una innovación al investigar todos los sólidos conocidos en la época. Una parte de esta innovación fue su concepción de una clase general de objetos (en este caso, sólidos que satisfacían ciertas condiciones de simetría), frente a objetos más específicos, como las secciones cónicas. Y la otra fue el desarrollo de un cuerpo considerable de teoremas aplicables a esa clase, incluida la "invención" (cursiva en el original) del método de agotamiento, una invención que suele

> atribuirse a Eudoxo (Los autores entienden esta afirmación en el sentido de que Valerio fue el primero en sistematizar este antiguo artificio, en los tres primeros teoremas de 'De centro'). Al aplicar estos teoremas generales a la solución de una amplia clase de problemas, Valerio avanzó así más allá de sus antiguos predecesores renacentistas (BERGGREN, 1982, p. 25).

Stevin[27] conocido como uno de los primeros expositores de la teoría de las fracciones decimales y por ser el primer matemático que reconoció la validez de los números negativos, como aquellos números menores que cero, al aceptarlos como resultado de los problemas con que trabajaba. Reconoció la igualdad entre la sustracción de un número positivo y la adición de un número negativo $[(+a)-(+b)=(+a)+(-b)]$. Por ello es considerado en la actualidad como el padre de los números negativos. Desarrolló el algoritmo de trabajo para la obtención del máximo común divisor (MCD) de dos polinomios, o de dos o más números enteros, al mayor número entero que los divide sin dejar residuo alguno. En Física se le conoce por sus contribuciones a la Estática e Hidrostática.

Los aportes de Stevin representan un punto de inflexión en el desarrollo de la noción de número, en tanto que rompen explícitamente con la concepción griega aun dominante en la "matemática teórica" de esa época. Por ello se le considera introductor, en la Europa occidental, de la notación decimal para los números fraccionarios; sin embargo, la fundamentación teórica que justifica el uso de dicha notación, y que Stevin pretendió dar en términos de un sistema axiomático-deductivo, no ha sido todavía suficientemente valorada. Stevin propone un nuevo concepto que

[27] Simón Stevin (1548-1620), matemático belga, ingeniero militar e hidráulico, constructor de molinos y fortificaciones. Se le considera el padre de los números negativos dado que fue el primer matemático que los aceptó como resultado de ecuaciones algebraicas.

integra las operaciones de "contar" y "medir". La forma como concibió y justificó sus nuevos números puede arrojar luz sobre algunas dificultades en el aprendizaje de los conceptos básicos de la aritmética. Su obra *L'Arithmétique* contiene sus mayores aportaciones teóricas en la que propone convencer a sus contemporáneos que se puede tratar de manera unificada con un fundamento teórico común, la aritmética teórica y la aritmética práctica.

De *L'Arithmétique* se resaltan cuatro elementos fundamentales: el cambio que representó la definición de número de Stevin respecto a la definición de número en la matemática teórica griega. La dificultad que entraña una definición de número que se asocia tanto a cantidades continuas como a discretas. La ampliación del dominio numérico que resulta del nuevo concepto de número. Y la forma en la que las operaciones aritméticas intervienen en la evolución del concepto. Lo que permite inferir que con Stevin se presenta otra ruptura epistemológica con el concepto de número de la matemática teórica griega. En los griegos, el número se define a partir de la categoría de cantidad y mediante la oposición entre las cantidades infinitamente divisibles y las "finitamente" divisibles. La imposibilidad de dividir la unidad numérica, encierra la esencia de la cantidad discreta tal como la define Aristóteles, las subdivisiones de una cantidad discreta no se pueden continuar más allá de la unidad y, en consecuencia, sólo es posible llevar a cabo un número finito de estas divisiones. La unidad es el principio generador del número y su indivisibilidad lo caracteriza. Bajo tal concepción, el dominio numérico se limita, como una necesidad lógica, al de los números naturales (los números para contar) excluyendo de este dominio a la unidad, las cantidades nulas y cualquier expresión fraccionaria. Se establece una diferencia definitiva entre contar y medir. Ciertamente en la aritmética griega hay un tratamiento de las razones numéricas que ahora identificamos con los números racionales, pero estas razones no se consideran en sí mismas números, sino simples comparaciones entre números, que es posible explicitar porque existen desde el momento mismo en que existen los números.

Stevin extrae su concepto de número de la experiencia cotidiana y profesional, como una extensión de la práctica generalizada de medir. En este momento la frontera establecida por los griegos entre la matemática teórica y la matemática aplicada parece desvanecerse y las necesidades prácticas determinan el tipo de matemática que se debe desarrollar. Stevin, como afirma Klein: "...pone su experiencia en la práctica comercial, financiera e ingenieril al servicio de sus preocupaciones "teóricas" e inversamente, su "teoría" se pone en marcha dentro de su "actividad práctica" (KLEIN, 1968, p. 186).

La obra de Stevin está marcada por el predominio del campo operatorio con un tinte pragmático, para dar realidad al número. El primer indicio de que el número está condicionado por las operaciones que se pueden realizar con ello, se encuentra en *L'Arithmétique* donde Stevin argumenta a favor de la división de la unidad, afirmando que negar la divisibilidad de la unidad es limitar la naturaleza del número, "[...] la esencia de la cual se manifiesta en las operaciones aritméticas que muchos autores realizan, entre otras, la absoluta partición de la unidad... como lo hace Diofanto" (STEVIN, 1585, p. 02). Con afirmaciones como la anterior Stevin da al número una existencia operatoria, es decir, son las operaciones que podemos realizar con los números las que determinan su naturaleza. La unidad de Stevin es el resultado no sólo de una abstracción realizada sobre los objetos en tanto cantidades, sino, principalmente, de una abstracción realizada sobre las acciones coordinadas que se efectúan en el proceso de medir estos objetos. La inclusión de la unidad dentro del dominio numérico y la posibilidad de subdividirla indefinidamente, son las innovaciones teóricas más importantes de la aritmética de Stevin.

Para este tiempo se infiere que dentro del desarrollo del cálculo se observa que un infinitesimal o infinitésimo se intuye como una cantidad infinitamente pequeña, equivalente matemáticamente, a lo que, en términos usados hoy día, es $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, implica que f es un infinitésimo en $x = a$. De *L'Arithmétique* se comienza a determinar características de los infinitésimos como las siguientes propiedades, vistas desde la óptica de las matemáticas modernas: La suma de dos infinitésimos es un infinitésimo. El producto de dos infinitésimos es un infinitésimo. El producto de un infinitésimo por una función acotada es un infinitésimo. El producto de una constante por un infinitésimo es un infinitésimo. El producto de dos infinitésimos es un infinitésimo. El producto de un infinitésimo por una función acotada es un infinitésimo. El producto de una constante por un infinitésimo es un infinitésimo. Características que posteriormente darán origen a las dos caras del cálculo infinitesimal (diferencial e integral).

Por otro lado, aparecen los trabajos de Galilei, que han sido objeto de aproximaciones epistemológicas muy diferentes; con Galileo se funda un modo particular de investigar los fenómenos del movimiento. La reflexión sobre ese acto de fundación enfrenta a la especificidad de una disciplina: la física-matemática. Su estudio sirve de propedéutica epistemológica matemática sobre los fenómenos de movimiento como una nueva ciencia del movimiento. Para Galileo, la idealidad no está fuera del mundo, en el modelo inaccesible a la industria humana. Las formas matemáticas perfectas son, más bien, un proyecto de la técnica. Para él, la unidad entre la matemática y el mundo no consiste sólo en la posibilidad de aproximar la descripción matemática al fenómeno que se quiere estudiar. Se requiere también aproximar el fenómeno a la matemática: producir un fenómeno que pueda ser descrito matemáticamente de la forma más aproximada posible. Para Galilei la ley expresada en términos de proporciones cuantitativas, o en términos algebraicos, se cumple sólo, en un entorno ideal, el vacío, que no presenta resistencias al movimiento, la verdad de la matemática es tanto más esencialmente verdad, cuanto que es universal y necesaria. La evidencia racional de la matemática es de tal naturaleza que no es posible sustraerse a ella. Galilei no duda en comparar el conocimiento de una demostración matemática con el modo como la verdad se pone de presente a los ojos del mismo Dios; al respecto Hernández, (1975, p. 87) lo cita en los siguientes términos:

> [...] tomando el entender intensive, en cuanto tal término indica intensivamente, es decir, perfectamente, afirmo que el entendimiento humano puede entender algunas proposiciones de esta manera, y por tanto, tener de ellas absoluta certeza; así son, por ejemplo, las ciencias matemáticas, es decir, la aritmética y la geometría, de las cuales el intelecto divino sabe infinitas proposiciones más, porque las sabe todas, pero, de las pocas comprendidas por el entendimiento humano, creo que el conocimiento es igual al divino en cuanto a la certeza objetiva, puesto que llega a comprender su necesidad, y sobre ésta no parece que puede existir seguridad mayor (HERNANDEZ, 1975, p. 87).

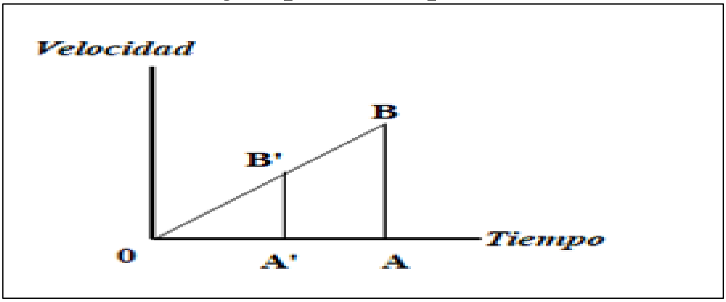
Acto seguido presenta independencia entre matemáticas y la experiencia sensible, no como una cuestión de esencia, sino como una limitación de ciertos discursos:

> Queréis culpar a los matemáticos de ignorancia, por no haber dado cuenta de que el sentido en los sensibles comunes se engaña; como si el saber si se engaña o no fuera un recóndito y profundísimo

> misterio y secreto de la filosofía. Pero, ¿Quién ha hecho mayores y más exactas observaciones y especulaciones acerca de los engaños de la vista que los mismos matemáticos? [...] El ojo no se engaña en absoluto al recibir la especie de la madera (del remo) puesta en medio del agua, como rota, porque ella no es menos verdadera cuando viene del agua rota que cuando del aire derecha; sino que el engaño está en el discurso, que no sabe que las especies visibles en los diversos medios transparentes se refractan (HERNÁNDEZ, 1975, p. 397).

Lo que permite inferir que para Galilei la ciencia matemática se cumple en el laboratorio; pero el mundo es visto progresivamente como un inmenso laboratorio y convertido efectivamente en un laboratorio gracias a la técnica. En su obra *Dos nuevas ciencias*, concibe las áreas de un modo parecido a Kepler; al tratar el problema del movimiento uniformemente acelerado, presentó un razonamiento para mostrar que el área de la curva tiempo-velocidad es la distancia. Supuso que un objeto se mueve con velocidad variable $v = 32t$ representado en la Figura 6 por la recta OB; la distancia recorrida en el tiempo OA es el área OAB. Llegó a esta conclusión considerando, por ejemplo, A´B´ como una velocidad típica en un instante y también como la distancia infinitesimal recorrida, y razonando entonces que el área OAB, que está construida con las líneas A´B´. Debe ser, por tanto, la distancia total. Este razonamiento (poco claro) estaba apoyado en la mente de Galileo por consideraciones filosóficas que equivalían a considerar el área OAB como construida con un número infinito de unidades indivisibles como A´B´.

Figura 6 - Movimiento de un objeto planteado por Galileo



Fuente: Elaboración propia.

Para este momento, los trabajos de Kepler[28] dieron un cambio al pensamiento convencional y sentaron las bases de la edad moderna. Entre sus aportes están: descubrimiento de las tres leyes de movimientos planetarios, comprobación de la manera en la que funcionan los logaritmos y el método para calcular el volumen de sólidos y calcular tablas astronómicas, reconocidas como las más precisas que existen; desarrolló un sistema infinitesimal en matemáticas, que fue antecesor del cálculo. Publicó un libro, titulado *Epitome Astronomiae Copernicanae*, donde reunió todos sus descubrimientos en un solo tomo. Fue el primer libro de texto de astronomía basado en los principios copernicanos, su influencia fue tal que convirtió a muchos astrónomos al copernicanismo-kepleriano. Como complemento en 1596 publicó un tratado titulado *Mysterium Cosmographicum*; la importancia de este trabajo radica en que presentó la primera demostración amplia y convincente de las ventajas geométricas de la teoría copernicana. En *Mysterium Cosmographicum*, dejando constancia de las ventajas que desde el

[28] Johannes Kepler (Alemania, 1571 - 1630), figura clave en la revolución científica, astrónomo y matemático; conocido por sus leyes sobre el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol. O'Connor, et al., 2000. «Biografía de Johannes Kepler»

punto de vista geométrico ofrecía la Teoría Heliocéntrica. En su trabajo sobre movimientos planetarios, encuentra el área de sectores de una elipse. Su método consistió en pensar las áreas como sumas de líneas, otra forma "rudimentaria" de integración.

Elementos que dieron ideas fuerza a tres matemáticos que hicieron contribuciones importantes en la época y que cambiaron radicalmente el rumbo de las matemáticas, en su orden: Fermat[29], Roberval[30] y Cavalieri[31], trabajos mostrados al detalle posteriormente en este manuscrito. Este último llegó a su "*método de los indivisibles*" por los intentos de integración de Kepler. No fue riguroso en su acercamiento y es difícil ver con claridad cómo se le ocurrió su método. Al parecer Cavalieri pensó en un área como formada por componentes que eran líneas y luego sumó su número infinito de "indivisibles". Demostró, usando estos métodos, que la integral de x^n entre 0 y a era $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, mostrando el resultado para ciertos valores de n e infiriendo el resultado general. Roberval consideró problemas del mismo tipo, pero fue mucho más riguroso que Cavalieri. Roberval se fijó en el área entre una curva y una línea como formada por un número infinito de rectángulos infinitamente delgados. Aplicó esto a la integral de x^m entre 0 y 1, demostró que tenía un valor aproximado de $(0^m + 1^m + 2^m + \cdots + \frac{(n-1)^{m+1}}{(n)^{m+1}}$, demostró que tendía a $\frac{1}{m+1}$ cuando n tiende a infinito, calculando así el área.

[29] Pierre de Fermat (1601-1665) jurista y matemático francés apodado con el sobrenombre de «príncipe de los aficionados» (O'CONNOR *et al*., 2000).

[30] Gilles Personne de Roberval; (1602-1675) Matemático y físico francés. Ideó el llamado «método de los indivisibles» para calcular la cuadratura de las superficies y el volumen de los sólidos. Demostró la regla de composición de fuerzas y describió la balanza que lleva su nombre (O'CONNOR *et al*., 2000).

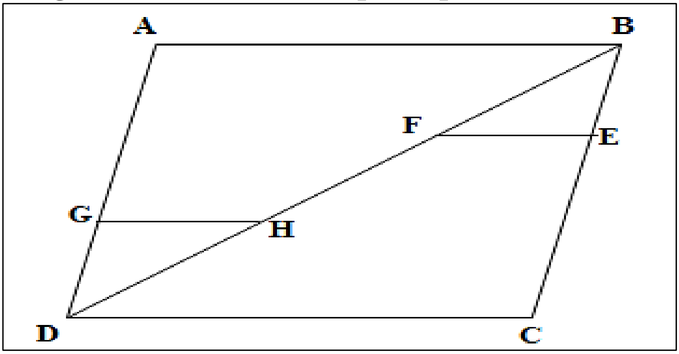
[31] Bonaventura Cavalieri (1598-1647), matemático italiano, alumno de Galileo. Su interés por las matemáticas fue estimulado por los trabajos de Euclides.

EL PRINCIPIO DE CAVALIERI

Cavalieri usó los infinitos como un modo de razonar, este método fue influido por Kepler y Galileo. Cavalieri estimulado por este último se interesó en problemas propios del cálculo, desarrolló ideas sobre indivisibles mediante un método geométrico. Publicó *Geometría Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota* en 1635, (Geometría superior mediante un método bastante desconocido, los indivisibles de los continuos). Donde consideró un área como la superficie constituida por un número indefinido de rectas paralelas y equidistantes; el volumen como compuesto por un número indefinido de áreas planas paralelas; a estos elementos los llamó los *indivisibles* de área y volumen respectivamente. En líneas generales los indivisibilistas mantenían, como expresa Cavalieri en sus *Exercitationes Geometricae Sex* en 1647, que una línea está hecha de puntos; el plano está hecho de líneas, como un tejido de hebras y un sólido de áreas planas como un libro de hojas, sin embargo, aceptaban un número infinito de elementos constituyentes.

En la Figura 7 se ilustra el método o principio de Cavalieri para demostrar que el paralelogramo ABCD tiene área doble que cualquiera de los triángulos ABD o BCD; hace notar que cuando GD=BE, se tiene que GH=FE. Por tanto, los triángulos ABD y BCD están constituidos por igual número de líneas iguales, tales como GH y EF, y por tanto tienen que tener áreas iguales. Este mismo principio está incluido en la proposición que se enseña actualmente en los libros de geometría de sólidos y que se conoce como Teorema de Cavalieri. Con este método se encontró el área acotada bajo funciones del tipo $f(x) = x^{n}$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, método enteramente geométrico.

Figura 7 - Ilustración al principio de Cavalieri



Fuente: Elaboración propia. Basada en: Mateus-Nieves (2021).

Los indivisibles de Cavalieri, conocidos como el *Principio de Cavalieri*. Fueron la nueva concepción de la geometría infinitesimal, marcaron el comienzo de una segunda etapa en las matemáticas infinitesimales. Cavalieri alcanzó mayor claridad en las ideas aún oscuras en Kepler, quienes se había adherido a la tradición materialista antigua, representada por Demócrito, especialmente a la idea del átomo como componente indivisible de la materia. Cavalieri intento sistematizar todos estos datos, y como resultado, publicó en 1635 un libro titulado *Geoemtria Indivisibilibus continuorum*… (Geometría de los indivisibles continuos presentada según un nuevo método). Un libro bastante confuso de entender debido a que el autor no explica suficientemente qué se ha de entender, en sentido matemático, por indivisible. Cavalieri debido a la cantidad de reproches que recibió por esta obra, utilizó figuras planas, que presentó como un tejido de hilos paralelos; y los sólidos como libros compuestos por hojas paralelas, pero no dejó claro ¿de qué manera utilizaba los indivisibles? ¿Cuál era su método? ¿Cómo se le ocurrió el principio que hoy lleva su nombre?

A pesar de ello, Cavalieri supuso que para toda figura plana cerrada se puede encontrar una recta A tangente a la que llamó:

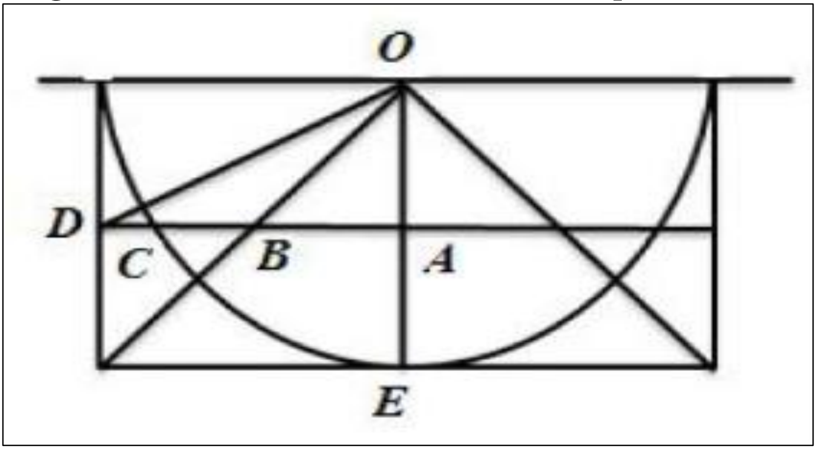
regula, o *listón*, *directriz*, *regla*; con un solo punto en común (vertex o vértice) con la curva que limita la figura. La regula posee infinitas paralelas que se alejan de ella hasta encontrar una, la tangente en el lado opuesto (tangens opposita) B, que toca a la figura en último lugar. De esta forma consideró un plano P^* que pasa por A y otro P^{**} paralelo a P^* y que pasa por B. Se desplaza P^* paralelamente hasta superponerlo a P^{**}, a este movimiento lo llamó fluir. Este concepto "fluyente" se convirtió en fundamental en la historia subsiguiente de la matemática infinitesimal; en particular en Barrow y Newton. Las intersecciones (rectas) de los planos fluyentes con la figura plana forma, en palabras de Cavalieri, "la totalidad de las rectas de la figura" (ANDERSEN, 1985, p. 295). Sobre esta expresión trabajara Leibniz más adelante. Para el espacio Cavalieri procede de forma similar; el lugar de la regula lo ocupa un plano. La regula produce al deslizarse la totalidad de los planos del sólido. Wubing (1979, p. 145) indica que Cavalieri "formuló su principio en dos proposiciones fundamentales. 1) La totalidad de los indivisibles de una misma figura es independiente de la regula. 2) Las figuras planas y también los sólidos, están en las mismas proporciones que la totalidad de sus rectas, respectivamente planos, tomados a partir de una regula cualquiera".

Cavalieri utilizo estas proposiciones como una especie de axioma y fue consciente de su carácter heurístico. Consideraba su método como una regla correcta que proporciona resultados correctos. Wubing (1979) presenta el proceder de Cavalieri para calcular del volumen de la esfera, de la siguiente manera:

> En una semiesfera se circunscribe un cilindro y en el cilindro se inscribe un cono. Entonces un plano trazado perpendicularmente al radio OE produce círculos de radios AC, AD y AB, con $CA^2 + AO^2$, como AO = AB y CO = DA se sigue $CA^2 + AB^2 =$

DA^2. Por tanto, multiplicando esta ecuación por π, se tiene que el área del círculo con la intercesión del plano con la semiesfera más el área del círculo en el cono, es igual al área del círculo en el cilindro" (p. 146). Ver figura 8.

Figura 8 - Cálculo del volumen de la esfera por Cavalieri



Fuente: Wubing (1979, p. 146).

El plano no estaba acotado longitudinalmente. Lo que vale para una terna de cuadrados de indivisibles, vale también para su totalidad, concluye Cavalieri. Luego, aplica su principio y obtiene $V_{esfera} + V_{cono} = V_{cilindro}$ y como $V_{cilindro} = 3V_{cono}$ y se sigue que $V_{esfera} = \frac{2}{3} V_{cilindro}$. Este método no aportaba nada nuevo al trabajo que ya había realizado Arquímedes en la antigua Grecia, el mérito está en el manejo de ciertas manipulaciones, integrales que hoy expresaríamos así:

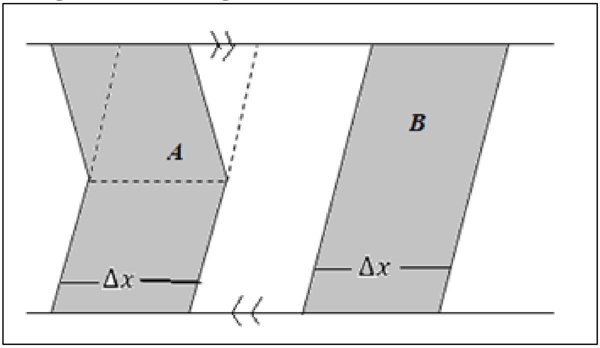
$$\int_0^a x^2 \ dx = \frac{1}{3} a^3$$

y

$$\int_0^a x^4 \, dx = \frac{x^5}{5}.$$

Entre los aportes de Cavalieri y que se desprenden de su principio, está la *integración de Cavalieri*. Para explicarlo al detalle y mostrar su importancia recurriré a elementos propios de las matemáticas modernas para poder mostrar sus bondades y los sorprendentes resultados que para la época este hombre descubrió y que probablemente murió sin saber la grandeza del trabajo realizado. Veamos: Supone que dos regiones de un plano están comprendidas entre dos rectas paralelas a dicho plano. Si toda recta paralela a estas dos rectas interseca ambas regiones en segmentos de línea de igual longitud, entonces las dos regiones tienen áreas iguales (ver Figura 9). Se resalta que el principio de Cavalieri desarrolla una novedosa técnica de integración que puede ser usada en las matemáticas modernas para hallar, de forma muy sencilla, el área de algunas regiones para las que es bastante difícil construir integrales de Riemann sencillas.

Figura 9 - integración de Cavalieri en R²



Fuente: Elaboración propia.

Siguiendo el principio de Cavalieri, Mateus-Nieves, (2022b) plantea que es posible formular los siguientes interrogantes: ¿qué ocurre cuando se sustituye la franja de integración rectangular habitual de la suma de Riemann por una banda de integración de forma no rectangular? Esta pregunta conduce a un esquema coherente de integración donde se rescatan algunos resultados, tales como: se consideran franjas de integración no rectangulares, se forma una suma de Cavalieri que puede transformarse en una suma normal de Riemann (de una región equivalente) mediante función de transformación $h(x)$, o en una suma de Riemann-Stieltjes mediante la función de transformación inversa $g(x)$. Para demostrar este resultado consideremos la región delimitada por el eje x y las rectas $f(x) = x$, $a(y) = 1 - y$ y $b(y) = 4 - y$, Figura 10a. se observa que no es posible expresar el área de esta región como una integral de Riemann. Sin embargo, es posible calcular el área de la región mediante una integral de Cavalieri:

$$área = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x)dx,$$

que está relacionada con la integral de Riemann (Figura 10b) y la integral de Riemann-Stieltjes (Figura 10c) de la siguiente manera:

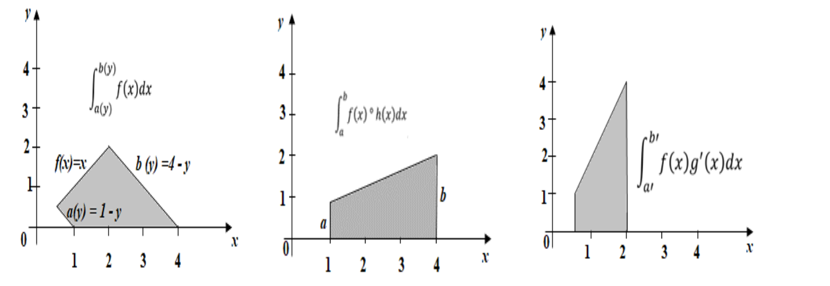
$$\int_{a(y)}^{b(y)} f(x)dx = \int_{a}^{b} (f \circ h)_x \, dx = \int_{a'}^{b'} f(x)dg(x),$$

para este ejemplo se llega al siguiente resultado, ya que $h(x) = \frac{x}{2}$

$$g(x) = 2x \cdot \int_{1-y}^{4-y} x \, dx = \int_{1}^{4} \frac{x}{2} \, dx = \int_{0.5}^{2} x \, d2x = 3.75 \triangleq$$

En este ejemplo, las regiones transformadas $f(x) \circ h(x)$, correspondiente a la formulación de Riemann y $f(x)g'(x)$, correspondiente a la formulación de Riemann-Stieltjes, mostradas en las Figuras 10b y 10c respectivamente.

Figura 10 - Ilustración de la integración de Cavalieri desde un ejemplo



10a. región no Riemann integrable 10b. formulación de Riemann 10c. formulación de Riemann-Stieltjes

Fuente: Elaboración propia.

La principal diferencia entre la integración de Cavalieri con la integración ordinaria de Riemann es que se pueden utilizar franjas de integración más generales. En cierto sentido, la integral de Cavalieri se reduce a la integral de Riemann ordinaria cuando las franjas de integración son rectangulares. Esto no quiere decir que la integral de Cavalieri amplíe la clase de funciones integrables de Riemann. De hecho, la clase de funciones integrables de Cavalieri es exactamente equivalente a la clase de funciones integrables de Riemann. Sin embargo, la integral de Cavalieri permite expresar áreas de algunas regiones como integrales simples para las que tendríamos que escribir múltiples integrales ordinarias de Riemann.

Con Cavalieri y Torricelli se ampliaron el uso de los infinitesimales, con los que Descartes[32] y Fermat usaron el álgebra para encontrar áreas y tangentes (integración y derivación en términos modernos). Fermat e Isaac Barrow[33] tenían la certeza de que ambos cálculos estaban relacionados, aunque fueron Newton (en 1660), en Inglaterra y Leibniz en Alemania (hacia 1670) quienes demostraron que los problemas de áreas y tangentes son inversos, equivalente a lo que hoy se conoce como *teorema fundamental del cálculo*. Es a comienzos de este siglo que se da la aparición del concepto de función, tiempo cuando comienza a tomar forma el cálculo integral que, junto con la geometría analítica, es posible afirmar, son «la mayor creación de todas las matemáticas». Recordemos que para la época había vigente cuatro tipos de problemas principales sin solución:

1. Dada la fórmula de la distancia que un cuerpo recorre como función del tiempo, obtener la velocidad y la

[32] René Descartes: (1596 - 1650), filósofo, matemático y físico francés, considerado como el padre de la geometría analítica y la filosofía moderna, fue uno de los nombres más destacados en la revolución científica.

[33] Isaac Barrow, teólogo, profesor y matemático inglés al que históricamente se le ha dado menos mérito en su papel en el desarrollo del cálculo moderno. Barrow es famoso por haber sido el primero en calcular las tangentes en la curva de Kappa. Profesor y mentor de Isaac Newton.

aceleración en cada instante; y, al revés, dada la fórmula de la aceleración de un cuerpo como función del tiempo, obtener la velocidad y la distancia recorrida. Este problema surge directamente del estudio del movimiento;

2. Obtener la tangente a una curva, como consecuencia de las aplicaciones de la óptica y el estudio del movimiento;
3. Obtener el valor máximo o mínimo de una función para aplicarlo al problema de tiro parabólico y el estudio del movimiento de los planetas;
4. Obtener longitudes de curvas; el área acotada por dichas curvas; el volumen acotado por las superficies que generan; los centros de gravedad y la atracción gravitatoria entre cuerpos extensos.

Para la época no había claridad sobre la estrecha relación que hoy tenemos entre los cuatro problemas, a pesar de que los griegos ya habían aplicado métodos exhaustivos para calcular áreas y volúmenes relativamente sencillos. Fue necesario aplicar mucha ingeniosidad, porque al método le faltaba generalidad, situación que no permitió obtener respuestas numéricas. Sin embargo, el interés se despertó en Europa cuando retomaron los trabajos de Arquímedes para obtener longitudes, áreas, volúmenes y centros de gravedad. Se volvió al método exhaustivo, que gradualmente fue modificado permitiendo así la invención del cálculo infinitesimal. Para este siglo, la consideración de la cuarta situación planteada, comenzó con Kepler, interesado en el problema de los volúmenes porque notó falta de precisión en los métodos utilizados por los comerciantes de vinos para obtener el volumen de los barriles. Manifiestos en su obra *Stereometria Dolorium*; donde expresó que el área de un círculo es el área de un número infinito de triángulos, cada uno con un vértice en el centro y una base en la circunferencia. De la fórmula del área de un polígono regular inscrito en una circunferencia, la mitad del perímetro por la apotema, obtenía el área del círculo. De forma análoga, consideró el volumen de la esfera como la suma de los volúmenes de pequeños conos cuyos vértices están en el centro de la esfera y cuyas bases están en la superficie. Demostrando que el volumen de la esfera es un tercio del radio por la superficie. Consideró el cono como una suma de discos circulares muy estrechos y así pudo calcular su volumen.

CAPÍTULO 3

El Cálculo en el Siglo XVII

EL CÁLCULO EN EL SIGLO XVII

Durante este siglo se intenta buscar solución a los cuatro problemas planteados y que aún no se tenía respuesta. La herramienta útil para esta labor fue la creación del Cálculo, llegó para resolver y unificar los problemas de cálculo de áreas y volúmenes, trazo de tangentes a curvas, la obtención de valores máximos y mínimos, proporcionando una metodología general para la solución de todos estos problemas; también permitió definir el concepto de continuidad y manejar procesos infinitos. De esta forma el Cálculo y sus derivaciones encontraron múltiples aplicaciones y sirvieron para modelar procesos en todos los ámbitos científicos, empezando por la física y las ciencias naturales, hasta llegar a las ciencias sociales. En este periodo se destacan dos matemáticos, el inglés Issac Newton y alemán Gottfried Wilhelm Leibniz, los dos trabajaron en forma casi simultánea, pero con enfoques diferentes.

Newton motivado por sus propias investigaciones físicas, trata las variables como “cantidades que fluyen” mientras que Leibniz conserva un carácter más geométrico y a diferencia de Newton trata a la derivada como un cociente incremental, y no como una velocidad. Leibniz no habla de derivada sino de incrementos infinitamente pequeños, a los que llama diferenciales y los nota dx. Lo mismo ocurre para y (con notación dy). Lo que Newton llamó fluxión, para Leibniz fue un cociente de diferenciales $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite, ni de función, los fundamentos de su cálculo infinitesimal son poco rigurosos. Se puede decir que el cálculo de fluxiones de Newton se basa en algunas demostraciones algebraicas poco convincentes, y las diferenciales de Leibniz se presentan como entidades extrañas que, aunque se definen, no se comportan como incrementos (SCHAFFER, 1990). Esta falta de rigor, muy alejada del carácter perfeccionista de la época griega, fue muy usual en la época post-renacentista y duramente criticada. Pasaron dos siglos para que los fundamentos del cálculo infinitesimal se cimentaran para convertirlo en uno de los principales hallazgos del razonamiento humano. La difusión de las nuevas ideas fue lenta y al principio con insuficientes aplicaciones. Al pasar de los años, los nuevos métodos tuvieron cada vez más éxito y permitieron resolver los problemas planteados y muchas otras situaciones que hasta entonces no se habían considerado. Sin embargo, estos logros nuevamente fueron sometidos a duras críticas.

EL CÁLCULO DE FERMAT

Fermat perfeccionó los cálculos sobre cuadraturas, trabajo que le hizo merecedor de un puesto de honor como precursor del cálculo. Bergadá (1979) indica que el mismo Newton en una carta descubierta en 1634 escribió con relación a sus ideas para el desarrollo del cálculo: “La indicación me la dio el método de Fermat para las tangentes. Aplicándolo a las ecuaciones abstractas directas e inversamente, yo lo hice general” (p. 120). Newton en su célebre frase: “Si he llegado a ver más lejos que otros es porque me subí a hombros de gigantes” se refiere entre otros, a su maestro y mentor Isaac Barrow (BERGADÁ, 1979, p. 128). De ahí que, Fermat fue más riguroso en su acercamiento al cálculo, pero no dio demostraciones (ver Figura 11). Generalizó la parábola y la hipérbola.

Para la parábola:

$$\frac{y}{a} = \left(\frac{x}{b}\right)^2$$

La generalizó como:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n = \left(\frac{y}{b}\right)^m,$$

y la Hipérbola:

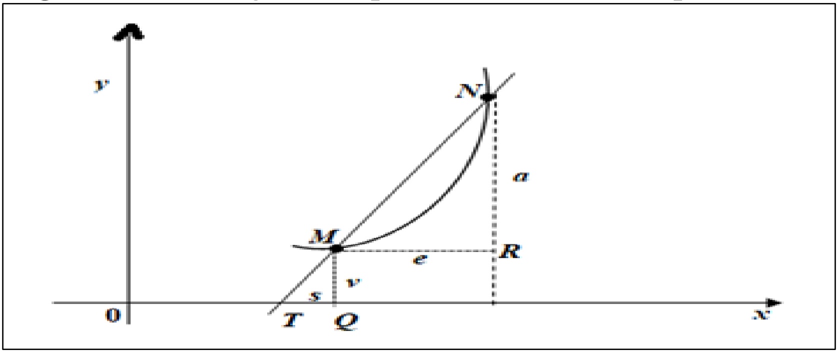
$$\frac{y}{a} = \left(\frac{b}{x}\right)^2$$

La generalizó como:

$$\left(\frac{y}{a}\right)^n = \left(\frac{b}{x}\right)^m.$$

Al estar examinando: $\frac{y}{a} = \left(\frac{x}{b}\right)^p$ Fermat calculó la suma de r^p para $1 \leq r \leq n$; investigó máximos y mínimos donde la tangente a la curva es paralela al eje x.

Figura 11 - Trabajo sobre parábolas adelantado por Fermat

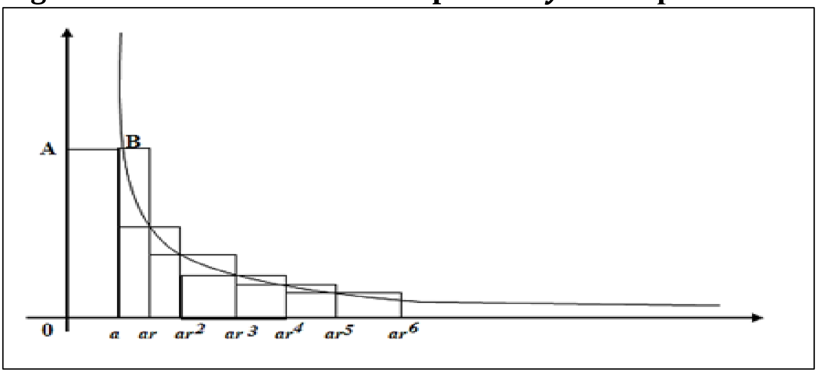


Fuente: Elaboración propia. Basada en: Mateus-Nieves (2022a, p. 1596).

La cuadratura de las curvas definidas por $y = x^n$ donde n es un número natural o bien un entero negativo $n \neq -1$, había sido realizado para n = 1, 2, …, 9 por Cavalieri, a pesar que Arquímedes, en la antigua Grecia, ya había resuelto geométricamente los casos correspondientes para n = 1, 2, 3. Sin embargo, es Fermat, quien logra obtener la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérboles generalizadas como $x^n y^m = 1$,, con $(n,\ m) \in \mathbb{N}$. Su estrategia consistió en seguir un método clásico de exhausción, pero considerando rectángulos infinitesimales inscritos en la figura a cuadrar cuyas bases estaban en progresión geométrica. Fermat consideró, al principio, las hipérbolas $yx^n = k$ y manifestó: “Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general” (FERMAT, 1643, p. 36).

El trabajo de Fermat visto en términos actuales permite ver la riqueza de sus raciocinios, admite observar la forma como calculaba la cuadratura de la hipérbola generalizada como $y = x^{-2}$ para $x \geq a$, reitero, usaremos notación y terminología modernas apoyados en una adaptación actual a la Figura 12 creada por él.

Figura 12 - Cuadratura de la hipérbola y = x−2 por Fermat



Fuente: Elaboración propia.

Elige un número $r > 1$ y considera los puntos de abscisas, ar, ar^2, ar^3, $\cdots$ los rectángulos inscritos tienen área:

$$(ar-a)\frac{1}{(ar)^2}+(ar^2-ar)\frac{1}{(ar^2)^2}+(ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2}+\cdots=\frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}=\frac{1}{ar}$$

el área de los rectángulos viene dada por:

$$(ar-a)\frac{1}{(a)^2}+(ar^2-ar)\frac{1}{(ar)^2}+(ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2}+\cdots=\frac{r-1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}=\frac{r}{a}$$

Por tanto, si se nombra S al área bajo la curva, se tiene que $\frac{1}{ar} < S < \frac{r}{a}$. Como esta desigualdad es válida para todo $r > 1$ concluye que $S = \frac{1}{a}$. Se observa que dicho valor es precisamente el área del rectángulo OABa. Cabe resaltar que el razonamiento de Fermat tiene detalles muy interesantes que se pierden usando la terminología y símbolos actuales. Para el efecto veamos parte de su razonamiento, pero que, de no hacerlo, sería incompresible para alguien que no esté entrenado en el uso y manejo de la terminología de la época. Solo comparto una pequeña parte de ese razonamiento: Fermat se apoya en una propiedad de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad, la enuncia como sigue: "Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos, como el mayor es a la suma de los términos restantes" (FERMAT, 1643, p. 39). Llama R_1, R_2, R_3,$\cdots$a las áreas de los sucesivos rectángulos y S a la suma de todos ellos. Como se trata de una progresión geométrica decreciente, se tiene que:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_2}{S - R_1},$$

simplificando, resulta: $S - R_1 = \frac{1}{a} = OA - AB \triangleq$. Al respecto dice Fermat:

> [⋯] si añadimos (a ambos miembros de la igualdad) el rectángulo R$_1$ que, a causa de las infinitas subdivisiones, se desvanece y queda reducido a nada. Alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas definidas anteriormente excepto a la que ha sido indicada como "la hipérbola de Apoloni" (FERMAT, 1643, p. 40).

Es interesante ver cómo en las cuadraturas de Fermat de hipérbolas y parábolas generalizadas subyacen los aspectos esenciales de la integral definida tal como la conocemos hoy: la división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños; aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva. Se puede entender como un intento de expresar algo parecido a un límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños.

Fermat en su obra *Método para la investigación de máximos y mínimos* (*Methodus ad disquirendam maximan et minimam*), estableció el primer procedimiento general conocido para calcularlos. Expresó que toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y las siguientes reglas:

1. Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado);
2. Se expresa la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos de cualquier grado;
3. Se sustituirá a continuación la incógnita original a por $a + e$, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e, en términos de cualquier grado;
4. Se "adigualará" para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima;
5. Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias;
6. Se dividirán todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros;
7. Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mimo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo;
8. La resolución de esta última ecuación dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.

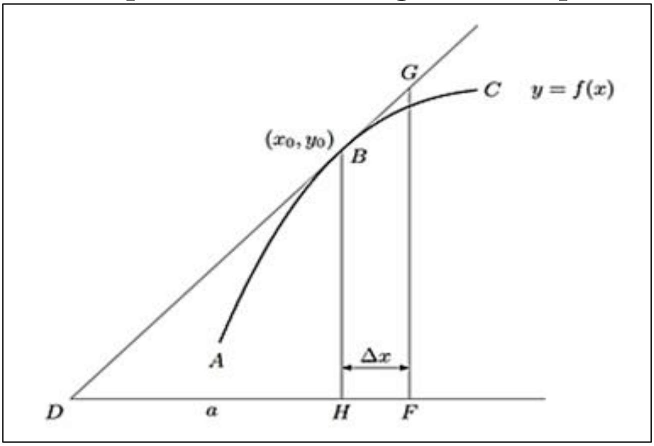
Fermat compartió con Descartes el método esencialmente como se usa hoy, es decir, encontrando máximos y mínimos dónde la derivada de la función es 0. De hecho, debido a este trabajo

Lagrange[34] afirmó claramente que él consideraba a Fermat como el inventor del cálculo. Este método lo ilustró hallando un punto de un segmento que hace máxima el área de un rectángulo. Sin embargo, esto significa extrapolar demasiado el contenido estricto del método. Lo que estamos haciendo es interpretar con nuestra mirada de hoy lo que hizo Fermat. Ya que, en primer lugar, Fermat no pensaba una cantidad como una función, y por eso habla de "cantidad máxima o mínima", no de una función que alcance un máximo o un mínimo. Para este momento Fermat no tiene clara la noción de variable independiente. Él está pensando en una ecuación algebraica con dos incógnitas que se interpreta como segmentos, es decir, magnitudes lineales dadas. Fermat tampoco dijo nada acerca de que fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el método no implica ningún concepto de límite, sino que es puramente algebraico. Aquí se resalta que esta forma de calcular tangentes por Fermat, creó inconformidad especialmente en Descartes, quien objetaba que este método comentando que esta forma de hallar tangentes no era una aplicación del cálculo de máximos y mínimos. Sin embargo, los problemas a los que Fermat aplicó su método son problemas de construcciones geométricas más que de optimización de cantidades.

Fermat utilizó el método desde un incremento muy pequeño y planteó una ecuación algebraica, que había utilizado para hallar máximos y mínimos, usados al resolver el problema de la tangente. Para entender el método que utilizó Fermat, observemos el siguiente ejemplo en términos modernos: Dada y=$f(x)$, Figura 13, para determinar la tangente en el punto (x_0; y_0), se hace un pequeño incremento que llamaremos Δx a partir del punto H, de ello, F=a+Δx.

[34] Joseph Louis Lagrange, matemático, físico y astrónomo italiano. Demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica Lagrangiana y tuvo una importante contribución en astronomía (O'CONNOR, 2006).

Figura 13 - Método usado por Fermat para calcular la tangente en un punto



Fuente: Elaboración propia.

Al construir los triángulos DGF y DBH se observa que son semejantes. Usando la teoría de proporciones concluye que:

$$\frac{HB}{HD} = \frac{FG}{FD},$$

implica que:

$$\frac{y_0}{a} = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{a + \Delta x}$$

de donde obtiene:

$$(a + \Delta x)f(x_0) = a[f(x_0 + \Delta x)],$$

equivalente a tener:

$$f(x_0)\Delta x = a[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)],$$

para finalmente llegar a:

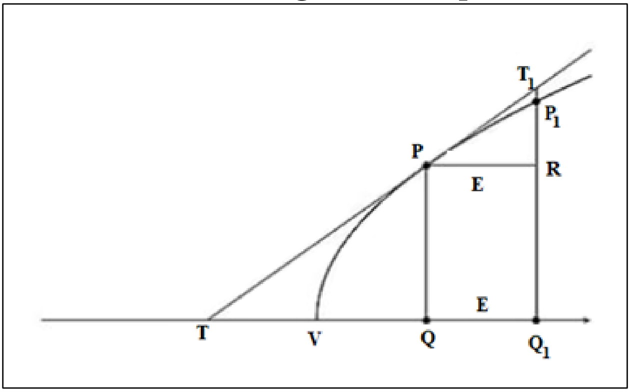
$$\frac{f(x_0)}{a} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \triangleq.$$

Posteriormente simplifica términos semejantes en $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, divide por Δx y desprecia términos donde aparezca Δx, de forma similar hace $\Delta x = 0$, que produce como resultado la pendiente de la tangente en (x_0; y_0). Aquí se resalta que este cociente diferencial es el que se usa actualmente para calcular la pendiente de la recta tangente. Con este cociente diferencial se evalúa la derivada en un punto, que Matemáticas Modernas notamos $f'(x_0)$. Lo que se está mostrando es que el método de Fermat es equivalente a calcular:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

reitero que, el método de Fermat no implicó ningún concepto de límite, dado que fue de carácter algebraico. Otro elemento a destacar de este trabajo es que en Matemáticas Modernas se toma $f'(x_0) = 0$, como el procedimiento que se utiliza para hallar los máximos y mínimos ordinarios de una función $f(x)$, siempre que la función sea diferenciable. Ahora bien, para calcular tangentes, determinó la sub tangente a una parábola haciendo uso de su método para máximos y mínimos, Figura 14.

Figura 14 - Método de Fermat para cálculo de la sub tangente en un punto dado



Fuente: Elaboración propia.

El segmento TQ es la sub tangente a la parábola en un punto dado P. El vértice de la parábola es V. Teniendo en cuenta que los triángulos TQP, y TQ_1P_1 son semejantes, resulta teniendo en cuenta:

$$\frac{T_1Q_1}{PQ}=\frac{TQ_1}{TQ}.$$

Ahora la propiedad de la parábola:

$$\frac{VQ_1}{VQ}=\frac{P_1{Q_1}^2}{TQ^2}$$

y que P1Q1 < T1Q1 deduce que:

$$\frac{VQ_1}{VQ} = \frac{P_1Q_1{}^2}{TQ^2}.$$

Supone VQ=a, que es la abscisa de la parábola en P, conocida porque se conoce P. Indica que si se hace TQ = x que es la sub tangente que desea calcular, y QQ_1 = e. Aplica su método de máximos y mínimos, sustituye esta desigualdad por la igualdad aax^2 + ex^2 ≈ ax^2 + $2aex$ + ae^x simplificando términos y dividiendo por e obtiene $x^2 \approx 2ax + ae$, elimina el término que queda en e, iguala y simplifica por x, para obtener que $x = 2a$, resultado ya conocido de la antigüedad y que expresa que la subtangente es el doble de la abscisa.

Fermat probó que el área bajo la curva $y = x^n$ con $a \leq x \leq b$ es igual a:

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

para cualquier número racional n distinto de -1. Basándose en propiedades de las progresiones geométricas y en que, dada una progresión geométrica decreciente a^1, a^2, ⋯, a^n, ⋯, de suma S, obtiene la igualdad:

$$\frac{a_1 - a_2}{a_2} = \frac{a_1}{S - a_1}.$$

Usa construcciones geométricas y propiedades de las progresiones para realizar la cuadratura de hipérbolas de orden superior, como $x^2 \cdot y = k$ ($k = Contante$). De este modo, concluyó que el área bajo esta curva es igual al área de un rectángulo dado. Su procedimiento en notación moderna, para calcular el área de la región no limitada de la curva $x^2 \cdot y = k$ y las rectas $x = a$ y $y = 0$ es el siguiente: Sobre el eje x se toman puntos con abscisas a, ar^2, ar^3, …, ar^n con $r > 1$. Se construyen los rectángulos de base $ar^{n+1} - ar^n$ y altura $\frac{1}{(ar^n)^2}$. Por tanto, las áreas de estos rectángulos son:

$$\frac{ar-a}{a^2} = \frac{r-1}{a}, \frac{ar^2-ar}{a^2r^2} = \frac{r-1}{a} \cdot \frac{1}{r}, \frac{ar^3-ar^2}{a^2r^4} = \frac{r-1}{a} \cdot \frac{1}{r^2}, \cdots$$

identifica que las áreas de los rectángulos forman una progresión geométrica decreciente, cuyo primer término es $(r-1)\ a$ y la razón es $1r$. La suma de estas áreas será, por tanto:

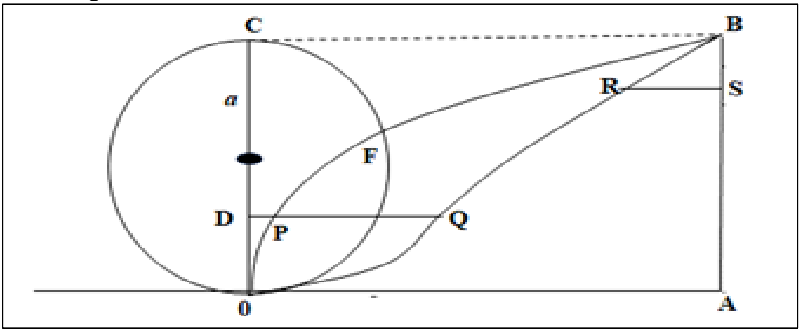
$$S = \frac{\frac{r-1}{a}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{r}{a}.$$

Infiere que mientras más próximo este r de 1, mejor aproximarán los rectángulos el área que se quiere calcular. Lo que, en términos actuales, es el equivalente al límite cuando r tiende a uno de esta suma, que equivale a $\frac{1}{a}$, y representa el área bajo la curva.

Las infinidades de Roberval

Estos aportes relacionados con la integral de Cavalieri inspiran en 1634 a Roberval a utilizar esencialmente el método de los indivisibles para obtener el área encerrada bajo un arco de cicloide. Denominó a su método el "*método de las infinidades*", Figura 15, aunque lo tituló de Traité des Indivisibles.

Figura 15 - Método de las infinidades de Roberval

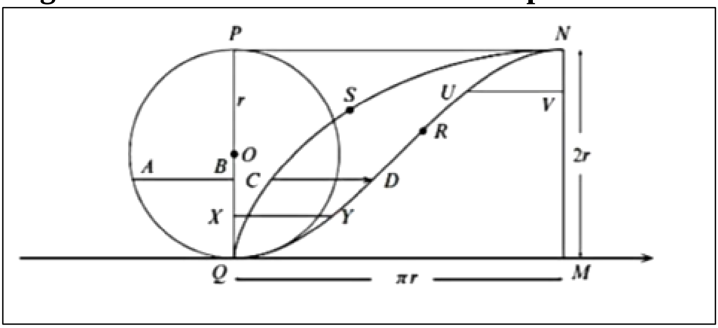


Fuente: Elaboración propia. Basada en: Mateus-Nieves (2022a, p. 1598).

Sea OABP el área situada bajo la mitad de un arco de cicloide. El diámetro de la circunferencia generatriz es OC y P es un punto cualquiera del arco. Se toma PQ=DF. El lugar geométrico descrito por Q se llama curva asociada a la cicloide. (La curva OQB es, en notación actual, $y = a\ sen\ (x/a)$, donde a es el radio de la circunferencia generatriz, con tal que el origen esté en el punto medio de OQB y el eje OX sea paralelo a OA). La curva OQB divide al rectángulo OABC en dos partes iguales porque a cada línea DQ en OQBC le corresponde una línea igual RS en OABQ. Entonces puede aplicarse el principio de Cavalieri. El rectángulo OABC tiene su base y su altura iguales, respectivamente, a la semicircunferencia y diámetro de la circunferencia generatriz; por lo tanto, su área es el doble de la circunferencia. Entonces OABQ tiene la misma área que la circunferencia generatriz. Además, el área entre OPB y OQB es igual al área del semicírculo OFC porque de la misma definición de Q se tiene que DF=PQ, de modo que estas dos áreas tienen el mismo ancho en todas partes. En consecuencia, el área encerrada debajo del semiarco es una vez y media el área de la circunferencia generatriz. También obtuvo: el área encerrada en un arco de la curva seno; el volumen generado por la revolución del arco alrededor de su base; otros volúmenes conectados con la cicloide y el centro de su área ≙.

En 1630 Mersenne propuso a los matemáticos de la época encontrar la cuadratura de la cicloide. Trabajo realizado por Roberval en 1634, utilizó esencialmente el método de los indivisibles de Cavalieri. Recordemos que la cicloide es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar, Figura 16.

Figura 16 - Cuadratura de la cicloide por Roberval



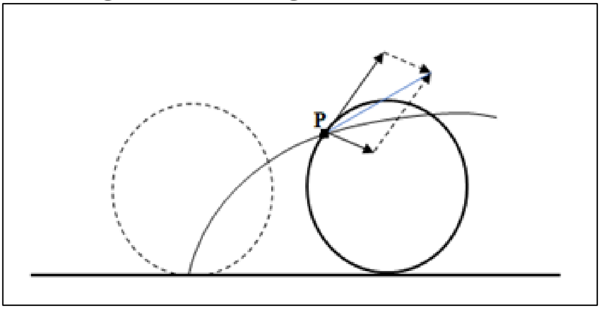
Fuente: Wubing (1979, p. 149).

Sea QMNS la mitad de un arco de la cicloide generada por el círculo de radio *r* centrado en 0. El área del rectángulo QMNP es el doble del área del círculo. Se construyen segmentos de línea infinitesimales horizontales AB, con longitud determinada por la distancia horizontal entre el diámetro PQ y la circunferencia. Cada punto C de la cicloide es sometido a una traslación horizontal hasta el punto D, según el correspondiente segmento AB = CD, y así se obtiene la curva QRN, llamada compañera de la cicloide. Por la construcción realizada, las secciones horizontales del semicírculo y de la región comprendida entre la cicloide y su curva compañera son segmentos de igual longitud, por lo que dicha región tiene área igual a la mitad del círculo. Por otra parte, la curva compañera de la cicloide divide en dos partes iguales al rectángulo QMNP, pues, como Roberval demostró, las secciones horizontales de altura a y $2r - a$ dan en cada una de las partes en que dicha curva divide al rectángulo, segmentos iguales XY y UV. Se deduce así que el área encerrada por la mitad de un arco de cicloide es $\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$ por tanto, se concluye que el área encerrada por un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que la genera ≙. A pesar de esto, los matemáticos de la época no se mostraban de acuerdo acerca del valor que había de dar al método de los indivisibles, la mayoría lo consideraban como un método heurístico y se llegó a creer que era aún necesaria una demostración por exhausción.

LOS APORTES DE TORRICELLI

En 1630 Roberval y Torricelli descubrieron independientemente un método para calcular tangentes por medio de consideraciones cinemáticas apoyados en dos ideas básicas: considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil que obedece a dos movimientos simultáneamente; y considerar la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento en ese mismo punto. Si la razón entre las velocidades de los dos movimientos es conocida, la dirección del movimiento resultante se puede hallar mediante la ley del paralelogramo, a pesar de que antiguamente Arquímedes había usado un método análogo para trazar tangentes a su espiral (Figura 17).

Figura 17 - Tangente a la cicloide



Fuente: Elaboración propia.

Considera una cicloide como la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar. El punto que genera la cicloide tiene una velocidad angular igual a la velocidad de avance horizontal, por tanto, su tangente en un punto P se obtiene sumando el vector tangente a la circunferencia generadora en P y un vector horizontal en P, ambos vectores tienen igual módulo. Esta idea de la tangente solamente podía aplicarse a curvas mecánicas, dado que relaciona geometría y dinámica al estilo de Galileo. Lo interesante de este trabajo es que permite observar que con este método usado para calcular áreas, volúmenes y otras cantidades comenzó con modificaciones del método exhaustivo griego. De forma análoga al proceso usado por los griegos que usaron diferentes tipos de figuras rectilíneas aproximantes, en el siglo XVI fue adoptado un procedimiento sistemático utilizando rectángulos. Veámoslo desde una situación particular: supongamos que se quiere calcular el área situada por la parábola $y = x^2$ con $0 \leq x \leq B$, Figura 18; se observa que la medida del ancho de estos rectángulos se hace cada vez más pequeña, por lo que la suma de las áreas de los rectángulos se aproxima al área contenida bajo la curva. Esta suma, si las bases son todas ellas de ancho d, y si se utiliza la propiedad característica de la parábola que la ordenada es el cuadrado de la abscisa, equivale a:

$$d \cdot d^2 + d(2d)^2 + d(3d)^2 + \cdots + d(nd)^2$$

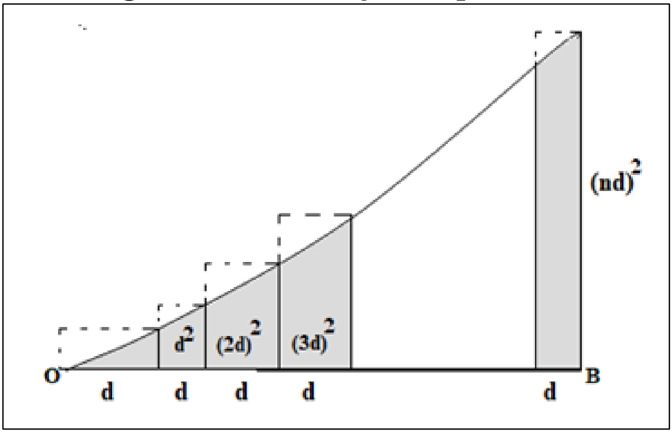
o lo que es lo mismo $d^3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$. Recordemos que la suma de las potencias m-ésimas de los primeros n números naturales ya había sido obtenida por Pascal y Fermat para ser usadas en tales problemas; por ello se hace natural sustituir la última expresión por

$$d^3\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right),$$

al suceder d por la longitud fija OB dividida por n, se obtiene:

$$OB^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) \triangleq.$$

Figura 18 - Área bajo una parábola



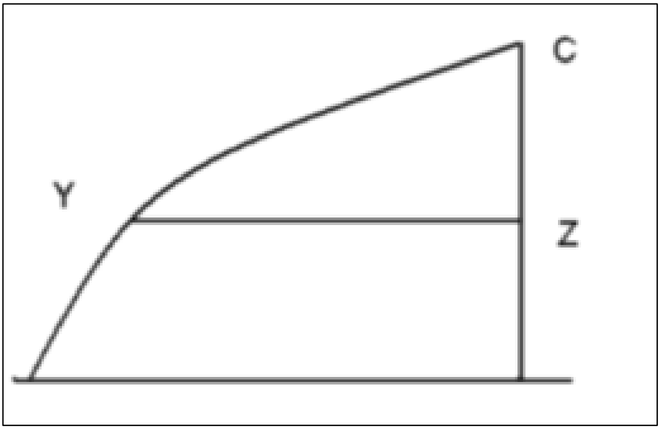
Fuente: Elaboración propia.

Siguiendo esta forma de razonar es posible despreciar los dos últimos términos cuando n es infinito y se obtiene un resultado correcto. Es de aclarar que, para la época, el proceso de paso al límite no había sido introducido todavía (apenas se percibía rudamente) y por lo tanto el despreciar términos como los dos últimos no estaba justificado. Situación que generó desconfianza en el trabajo. Este enfoque que fue mostrado por Stevin en 1586 en su obra *Statics*, también fue seguido por Fermat, que para 1636 ya conocía que:

$$\int x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

para todo n racional excepto -1. En la misma dirección de trabajo, para 1658 Pascal consideró algunos problemas sobre la cicloide, Figura 19. Calculó el área de cualquier segmento de la curva cortada por una recta paralela a la base, el centroide del segmento y los volúmenes de los sólidos generados por esos segmentos al girar alrededor de sus bases (YZ en la Figura 19) o de una recta vertical (el eje de simetría). Trabajó sobre áreas encerradas bajo curvas de la familia $y = x^n$, sumó pequeños rectángulos en la forma del método anterior, aunque su trabajo y resultados fueron enunciados geométricamente. Compartió problemas que había resuelto como un reto para otros matemáticos, junto a sus propias soluciones bajo el pseudónimo de Dettonville por temor a las críticas de sus contemporáneos.

Figura 19 - Consideraciones de Pascal sobre la cicloide



Fuente: Elaboración propia.

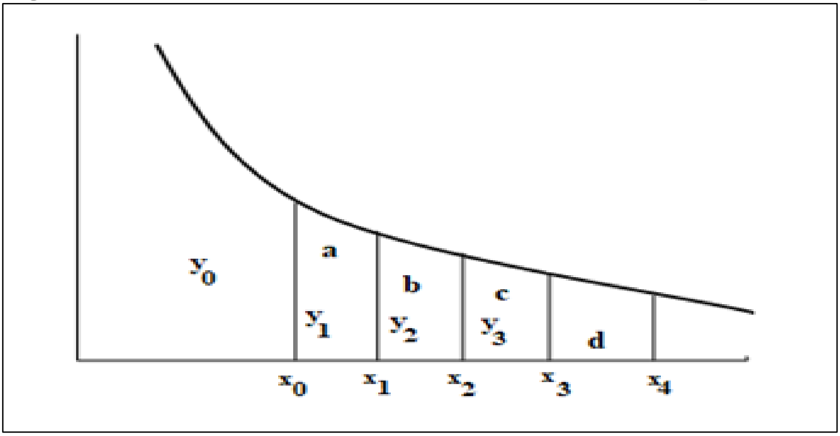
LOS MÉTODOS ANALÍTICOS EN CÁLCULO DE WALLIS

Wallis[35] fue de los primeros en introducir métodos analíticos en el cálculo al intentar calcular el área del círculo, analíticamente obtuvo una nueva expresión de π. Calculó el área acotada por los ejes, la ordenada en x y la curva para las funciones $y = (1 - x)^n$, para n = 1, 2, 3… lo que le permitió obtener áreas $x, x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5, x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ ... respectivamente. Cuando x = 1 estas áreas son $1, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}, \cdots$ pero la circunferencia estaba dada por $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Por inducción e interpolación, Figura 20, calculó su área y, mediante complicados razonamientos posteriores llegó a:

[35] John Wallis (1616-1703).

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cdots} \text{ (WALLIS, 1685, p. 21).} \triangleq.$$

Figura 20 - Cálculo analítico del área de un círculo por Wallis



Fuente: Elaboración propia.

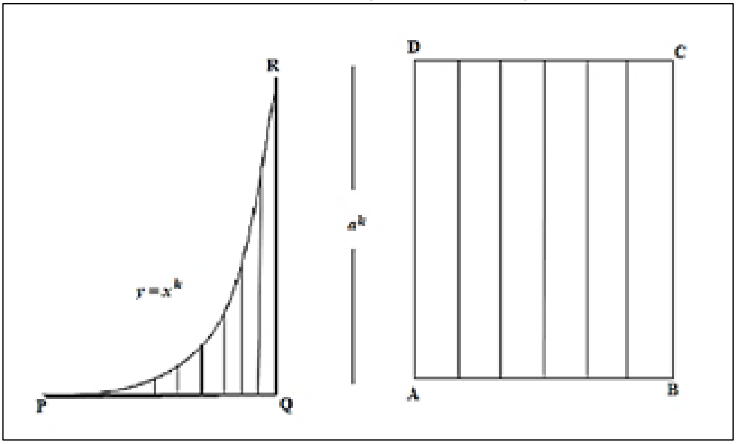
Gregorio de San Vicent[36] en su obra *Opus Geometricum* (1647) proporcionó las bases para el enlace entre la hipérbola rectangular y la función logaritmo. Empleando el método exhaustivo demostró, que si para la curva $y = \frac{1}{x}$ las x_i se eligen de modo que las áreas a, b, c, d… son iguales, entonces las y_i están en progresión geométrica. Significa que la suma de las áreas desde x_0 hasta x_i, cuya suma forma una progresión geométrica, es proporcional al logaritmo de los valores de las y_i lo que, en notación actual equivale a $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = k \cdot \log y$. Sin embargo, se aclara que la observación que las áreas pueden interpretarse como logaritmos se debe a Alfonso de

[36] Gregorio de San Vicent (1584-1667). Jesuita y matemático y geómetra belga (BOYER, 2010).

Sarasa[37] quien las postuló en *Solutio Problematis a Mercenno Propositi* en 1649.

Wallis expuso su tratado de Algebra en 1655 dentro de su obra "La Aritmética de los infinitos (*Arithmetica infinitorum*)" donde aritmetiza el método de los indivisibles de Cavalieri. Consideró muchas propiedades sobre las secciones cónicas, a pesar que no mostró realmente su cálculo, ya que los argumentos eran principalmente de geometría sintética, si logró que fuera rotado entre los matemáticos de la época incluyendo a Leibniz. Lo interesante de ese trabajo fue la presentación de la *integración aritmética de Wallis*. Para ilustrar y comprender el método consideremos calcular el área bajo la curva $y = x^k$ para $k = 1, 2, 3, \cdots$, sobre el segmento $[0, a]$ (Figura 21).

Figura 21 - Método de Wallis para calcular el área bajo la curva $y = x^k$



Fuente: Mateus-Nieves (2022a, p. 1610).

[37] Alfonso Antonio de Sarasa. (1618-1667) Matemático Jesuita belga que contribuyó al entendimiento de los logaritmos, particularmente como áreas bajo la hipérbola.

Desde métodos análogos a los empleados por Cavalieri, Wallis considera la región PQR formada por un número infinito de líneas verticales paralelas, cada una de ellas con longitud x^k. Divide el segmento PQ = AB = a en n partes de longitud $h = \frac{a}{n}$ donde n es la suma de estas infinitas líneas; observa que son del tipo $0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \cdots + (nh)^k$. Por analogía determina que el área del rectángulo ABCD es: $a^k + a^k + a^k + \cdots + a^k = (nh)^k + (nh)^k + \cdots + (nh)^k$ la razón entre el área de la región PQR y el rectángulo ABCD es:

$$\frac{\acute{a}rea\ PQR}{\acute{a}rea\ ABCD} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k}$$

resultado que lo lleva a estudiar el valor de la expresión para $n = \infty$[38]; posteriormente analizó varios casos para $k = 1, 2, 3$ considerando en cada situación sumas para distintos valores de $n=1, 2, 3, 4$. Observó ciertas regularidades en las mismas, pero de una forma limitada, con pocas bases aseveró que para $n = \infty$ y para todo $k = 1, 2, 3 \ldots$se verifica que:

$$\frac{1}{k+1} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k},$$

de donde naturalmente, deduce el valor del área de la región PQR como:

[38] Wallis introdujo en 1655 en su obra *De Sectionibus Conics*, el símbolo ∞ con el significado de infinito. Que se mantiene hasta hoy.

$$\frac{área\ PQR}{área\ ABCD} = \frac{área\ PQR}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1},$$

entonces $área\ PQR = \frac{a^{k+1}}{k+1}$ para k = 1, 2, 3, a pesar de que este resultado ya era conocido anteriormente, Wallis no se detuvo y generalizó la validez de la igualdad:

$$\frac{1}{k+1} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k}$$

a todos los exponentes racionales positivos. Observó que, dada una progresión geométrica de potencias de x, por ejemplo, 1 $x^3 \cdot x^5 \cdot x^7$ ⋯ la correspondiente sucesión de índices 0, 3, 5, 7, … forman una progresión aritmética. De ahí dedujo que $\sigma(fk) = K$, esta observación parece trivial, pero le permitió dar un paso al frente, de manera que desde la *interpolación* establece (sin demostración) que una conclusión análoga se obtiene para la progresión geométrica:

$$1, \sqrt[q]{x}, \left(\sqrt[q]{x}\right)^2, \cdots, \left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}$$

x de manera que la sucesión de sus índices debe formar una progresión aritmética, lo que necesariamente implica que debe ser $\sigma\left(\left(\sqrt[q]{x}\right)^p\right) = \frac{p}{q}$ para $p = 1, 2, 3, \cdots, q$. De esta forma obtuvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{0}\right)^p + \left(\sqrt{1}\right)^p + \left(\sqrt{2}\right)^p + \cdots + \left(\sqrt{n}\right)^p}{\left(\sqrt{n}\right)^p + \left(\sqrt{n}\right)^p + \cdots + \left(\sqrt{n}\right)^p} = \frac{1}{\frac{p}{q}+1}.$$

Situación que le permitió quedar convencido de la validez de su método, que posteriormente sería conocido como *interpolación de Wallis*, que solo llego a tener importancia en el siglo XVIII. El método fue un intento para resolver el problema: Dada una sucesión P_k, definida para valores enteros de k, encontrar el significado de $P_\propto$ cuando α no es un numero entero. Situación que lo llevó a afirmar que la igualdad $\int_0^a x^r\,dx = \frac{a^{r+1}}{r+1}$ no es válida solamente para exponentes r racionales, sino para otros como r^3, pero, naturalmente por las limitaciones de la época, no pudo dar ninguna justificación. Al revisar su obra se observa que usando raciocinios análogos intentó calcular la integral $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$ que representa el área bajo la semicircunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, y radio $r = \frac{1}{2}$, cuyo valor es $\frac{\pi}{8}$. Intentó obtener dicho resultado evaluando directamente la integral, pero no logró tener éxito en ese trabajo que, Newton hubo de resolver posteriormente, lo que si se destaca aquí es que sus resultados le llevaron a obtener la llamada *formula de Wallis* conocida como:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot\ \cdots}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot\ \cdots}$$

A pesar de estos avances, en la comunidad matemática se mantenía firme la necesidad de rectificar la solución al problema del cálculo de la longitud de una curva y dar rigurosidad a los fundamentos del naciente cálculo. En primer lugar, porque no creían que una curva pudiera tener la misma longitud que un segmento de recta construible. Incluso Descartes pensó que era un problema del que era posible que no tuviera solución. Sin embargo, la historia muestra que se logró la rectificación de esta y otras curvas. Entre los años 1657 y 1659, Neil rectifica la parábola semicubica $y^2 = x^3$; Wreu rectifica la cicloide, Fermat hace lo propio con otras y Gregory en 1668 da un método general para rectificar curvas en general. Valerio y Stevin crean los primeros resultados, inscribiendo polígonos, aumentando el número de lados y disminuyendo así la longitud de estos; se ayudaban de curvas auxiliares y métodos esféricos para calcular las sumas que se obtenían. Los alcances de las operaciones iniciales con infinitesimales logradas, fueron inspirados por problemas matemáticos y filosóficos sugeridos desde las épocas de Oresme, Eudoxo, Arquímedes, Aristóteles, Platón, Tales de Mileto, Zenón y Pitágoras. Sin embargo, ya en la edad media, con la invención de la geometría analítica, había una enorme variedad de nuevas curvas para cuyo estudio no servían los métodos tradicionales. Situación que hizo que los matemáticos del siglo XVII se vieran en la necesidad de inventar nuevas técnicas para calcular tangentes. En el periodo de 1630 a 1660 empiezan a usarse técnicas en las que podemos apreciar el uso de derivadas. Suelen ser técnicas específicas para resolver problemas concretos de forma empírica. Con frecuencia dichas técnicas no eran justificadas, simplemente, se comprobaba que proporcionan soluciones correctas. Los encargados de enfrentar este tipo de nuevas situaciones dieron origen a lo que aquí llamaremos el cálculo de Newton y el Cálculo de Leibniz, que miraremos al detalle más adelante en este documento.

LA OBRA DE PASCAL, HUYGENS Y EL MÉTODO DE DESCARTES

Entre los diferentes trabajos que Pascal publicó se destacan tres: *Traité du triangle arithmétique* donde presenta el denominado triángulo de Pascal como una representación de los coeficientes ordenados en forma de triángulo; fue tan amplia la acogida de su método que se expandió por toda Europa y Asia, entre ellos: matemáticos indios, chinos, persas, alemanes e italianos. En esta obra también trató los coeficientes binomiales, donde por primera vez formuló explícitamente el principio de la demostración por inducción matemática. El *Traité des ordres numériques* donde abordó el orden de los números y *Combinaisons* sobre combinaciones de números.

Observó que su triángulo se puede generalizar a dimensiones mayores. La versión de tres dimensiones se conoce como *pirámide de Pascal* o *tetraedro de Pascal*, mientras que las versiones más generales son llamadas *símplex de Pascal*. Cabe aclarar que en geometría un *símplex* o *n-símplex* (o *símplice*), equivale al análogo en n dimensiones de un triángulo. Más exactamente, un símplex es la envoltura convexa de un conjunto de $(n + 1)$ puntos independientes afines en un espacio euclideo de dimensión n, esto es, el conjunto de puntos tal que ningún m-plano contiene más que $(m + 1)$ de ellos. Se dice de estos puntos están en posición general. Como ejemplos: un *0-símplex* es un punto. Un *1-símplex* un segmento de una línea; un *2-símplex* un triángulo (Figura 22); un *3-símplex* es un tetraedro; y un *4-símplex* es un pentácron (en cada caso, con su interior). Por otro lado, un símplex regular es también un politopo regular. En general, un *n-símplex regular* puede construirse a partir de un $(n-1)$ *símplex regular* conectando un nuevo vértice a todos los vértices originales por la longitud común del lado. Obsérvese que la envoltura convexa de cualesquiera m de los *n* puntos también es un símplex, llamado una *m*-cara. Las 0-caras se llaman vértices; las 1-caras, lados; las (*n*-1)-caras se llaman facetas; y la única *n*-cara es el *n*-símplex en sí. Por lo tanto, el número de *m*-caras de un *n*-símplex puede hallarse en la columna $(m + a)$ de la fila $(n + 1)$ del Triángulo de Pascal. Este trabajo es de tal importancia que se pude inferir fueron los primeros vestigios de lo que hoy, en matemáticas modernas conocemos como Topología, veamos la presentación de un símplex estándar en términos de las matemáticas modernas dado que ayudan a comprender la extensión e importancia del trabajo de Pascal:

Un $n - símplex\ estándar$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por:

$$\Delta^n = \left\{(t_0, t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i t_i = 1, \quad t_i \geq 0 \ \forall\, i\right\}$$

quitando la restricción $t_i \geq 0$ en la condición anterior, se obtiene un subespacio n-dimensional afín a $\mathbb{R}^{n+1}$ contenido en el n-símplex estándar. Las coordenadas t_i son llamadas coordenadas Baricéntricas, los vértices del n-símplex estándar son los puntos:

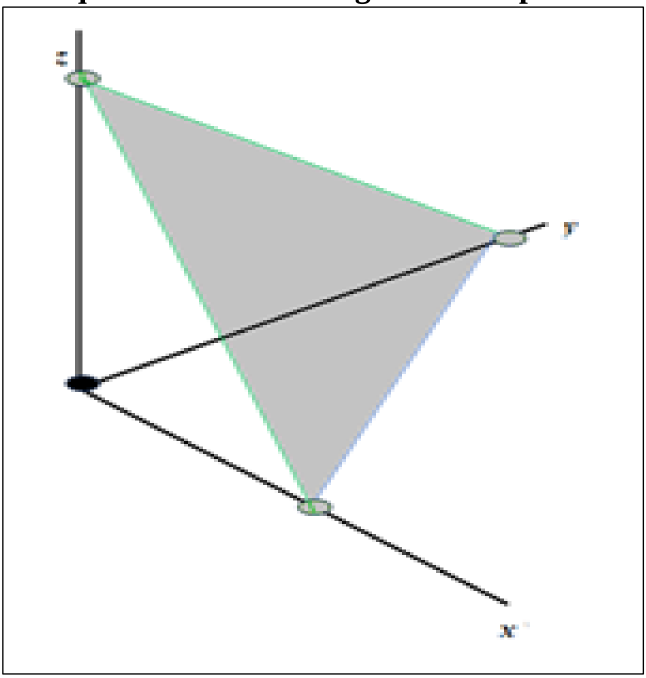
$$\begin{gathered} e_0 = (1, 0, 0, \cdots, 0) \\ e_1 = (0,1, 0, \cdots, 0) \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1) \end{gathered}$$

que representan un mapa canónico desde el n-símplex estándar para un n-símplex arbitrario con vértices $(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ dado para

$$(t_0, t_1, \cdots, t_n) \to \sum_i t_i v_i$$

donde los coeficientes t_i son llamados baricéntricas de un punto en el n-símplex. Este s*ímplex general* regularmente se conoce como n-símplex afín, que generaliza el mapa canónico en una trasformación afín. En algunas ocasiones se denomina *n-símplex afín orientado* para enfatizar que el mapa canónico puede ser de orientación preservada o revertido.

Figura 22 - *2-símplex estándar* en $\mathbb{R}^3$, equivalente a un triángulo en el espacio



Fuente: Elaboración propia.

En este apartado es importante establecer un paralelo entre el triángulo de Pascal y el binomio de Newton. Se observa que en el triángulo de Pascal todas las cifras escritas en cada fila corresponden a los coeficientes del desarrollo de las potencias del binomio de Newton.

$$(a \pm b)^2 = 1a^2 \pm 2ab + 1b^2$$
$$(a \pm b)^3 = 1a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm 1b^3$$
$$\vdots$$

con estos ejemplos se concluye que la serie de la expresión general que los desarrolla es:

$$(a \pm b)^n = a^n \pm a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 \pm \cdots + b^n$$

de esta forma, los coeficientes desarrollados de la forma $(a \pm b)^n$ se encuentran en la fila $(n + 1)$ del Triángulo de Pascal. Lo que permite generalizar este resultado para cualquier valor $n \in \mathbb{N}$ por inducción matemática. Ahora bien, si a cada nodo de este triángulo en cada fila lo denominamos z, queda la serie que describe la expresión general:

$$(a \pm b)^n = z_1a^n + z_2a^{n-1}b + z_3a^{n-2}b^2 \pm \cdots + z_nb^n$$

donde $z \in \mathbb{N}$, y $1 \leq z \leq n$.

Esta construccion del triángulo está relacionada con los coeficientes binomiales según la fórmula, también llamada *regla de*

Pascal, conocida hoy como *combinatoria*. Esta fórmula o regla explica que los coeficientes, *nodos del árbol*, de una fila dada del triángulo, se pueden calcular con la fórmula combinatoria de combinaciones de n elementos de k en k; expresado matemáticamente como $\binom{n}{k}$, dónde n es la *fila - 1* y k la posición en la fila. Esta comparación entre combinatoria y el triángulo de Pascal viene dada por la regla general antes mencionada

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \qquad \forall\, 0 \leq k \leq n; \quad n, k \in \mathbb{N}$$

Por ejemplo, para el binomio 2, se tiene lo siguiente:

- Quedarían tres nodos (elementos compuestos por *a*, *b* y coeficiente correspondientes) en la ecuación desarrollada del binomio, número que se refiere a la fila en la que se encuentra:

$$= 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

- Si se expresan los coeficientes del triángulo de la forma combinatoria queda:

$$\begin{array}{ccccc} & & \binom{0}{0} & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & \uparrow & & \end{array}$$

fila correspondiente a $(a+b)^2$

cuyo triangulo correspondiente es:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

Huygens[39] es considerado pionero en el estudio de la probabilidad, en 1656 publicó el libro *Razonamientos sobre los juegos de azar* (*De ratiociniis in ludo aleae*), donde introdujo conceptos importantes como la esperanza matemática; resolvió algunos de los problemas propuestos por Pascal, Fermat y De Méré. Su obra fue estudiada profundamente por Jakob Bernoulli en su *Ars Conjectandi*. Resolvió numerosos problemas geométricos como la rectificación de la cisoide y la determinación de la curvatura de la cicloide. También esbozó conceptos acerca de la segunda derivada.

Dedicó su vida a la investigación y resolución de incertidumbres. Su pasión por la observación astronómica lo llevó a construir lentes de grandes longitudes focales e inventó el ocular acromático para telescopios, perfeccionó lentes de aumento y fabricó telescopios, con ellos descubrió un anillo alrededor de Saturno, y Titán, una de sus lunas; su estudio sobre péndulos y óptica, derivaron en la mejora de los telescopios de esa época, situación que motivó y despertó el interés en Newton por este trabajo. Huygens vio la necesidad de medir el tiempo con exactitud para poder describir y determinar sus observaciones lo que le condujo a desarrollar el primer reloj de péndulo. En su obra *Horologium Oscillatorium* calculó la longitud del péndulo simple y el periodo de oscilación equivalente, luego describió una solución al problema del péndulo compuesto. Pascal, al conocer el trabajo sobre el péndulo de Huygens lo relacionó con el trabajo adelantado sobre la cicloide y la parábola, desarrollando así el concepto envolvente de familias de curvas. Huygens explicó las leyes de fuerza centrífuga para el

[39] Christiaan Huygens (1629-1695), astrónomo, físico, matemático e inventor neerlandés.

movimiento uniforme en un círculo. Ideó el resorte espiral, fabricando el primer reloj de bolsillo. Construyó un cronómetro portátil con la intención de facilitar a los marinos el cálculo de la longitud geográfica en el mar. Fue el primero en teorizar y formular las leyes correctas sobre la colisión elástica, expresadas en su trabajo *De motu corporum ex percussione*, hallazgos que fueron publicados en 1703, después de su muerte.

Luego de su encuentro con Newton y compartirle sus avances, publicó su tratado sobre la teoría ondulatoria de la luz, donde aseguró que la luz es un movimiento vibratorio. Basado en su teoría, pudo deducir las leyes de la reflexión y la refracción, que le permitieron encontrar explicación sobre la doble refracción; fue de los primeros en incursionar en el campo de la dinámica, mejoró y perfeccionó los trabajos que habían realizado Galilei y Descartes. Otras dos situaciones que persuadieron de forma significativa a Newton para su posterior estudio y formalización sobre la naturaleza de luz y la cinemática del movimiento.

Descartes en su *Géométrie* de 1637 produce un método para determinar la normal a una curva basado en la doble intersección. Aunque su principal interés estaba en solucionar el problema de las tangentes, su procedimiento fue menos infinitesimal que el de Fermat y radicó en trazar la circunferencia con centro en el corte de la normal a la curva (en el punto que se considere) con el eje de abscisas y que pase por el punto en cuestión. Se impone la condición que la circunferencia no corte a la curva en ningún otro punto, de esta manera se tiene como tangente la de la circunferencia en este punto. Este método es útil para curvas como $y = f(x)$ tales que $\left(f(x)\right)^2$ sea un polinomio sencillo. Lo que se observa aquí es un retorno a la situación griega, completamente estática. Hacia 1650, se consiguió determinar la tangente a algunas curvas por métodos "cinemáticos". Para ello se presentaba la curva en forma paramétrica (con parámetro el tiempo) y se interpretaba la velocidad como la suma vectorial de las velocidades según los ejes. Así se logró determinar la tangente a la cicloide, a la parábola y a la elipse. De Beaune extendió este método y lo aplicó a las tangentes; en este caso la doble intersección se convierte en raíces dobles. Hudde descubrió un método más sencillo, llamado las Reglas de Hudde, que involucra la derivada. Estas reglas, básicamente son dos propiedades de raíces polinómicas. En términos de Buss (1979, p. 95) el trabajo de Hudde es:

Si *r* es una raíz doble de la ecuación polinómica

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

y si $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}, b_n$ son números en aritmética progresión, entonces *r* es también una raíz de

$$a_0b_0x^n + a_1b_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_{n-1}x + a_nb_n = 0.$$

Esta definición es una forma del teorema moderno que menciona: si *r* es una raíz doble de $f(x) = 0$, entonces *r* es una raíz de $f'(x) = 0$.

1. Si para $x = a$ el polinomio $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

tiene un máximo relativo o mínimo valor.

2. Entonces *a* es una raíz de la ecuación

$$na_0x^n + (n-1)a_1x^{n-1} + \cdots + 2a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x = 0 \triangleq.$$

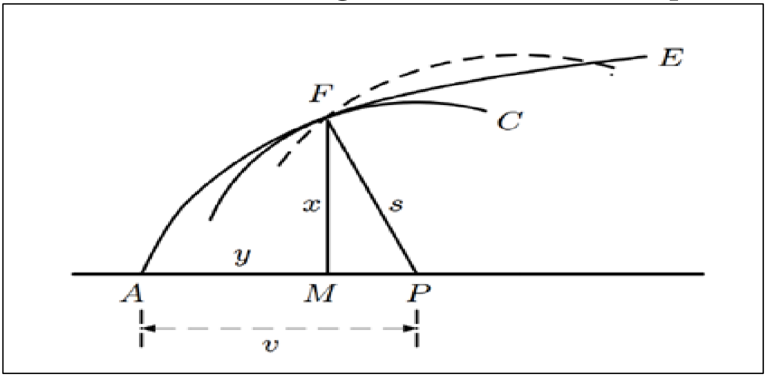
La regla dos es una modificación del teorema de Fermat en la forma que si $f(a)$ es un valor máximo relativo o mínimo de un polinomio $f(x)$, entonces $f'(a) = 0$, donde f' es la derivada de f.

El método de Descartes para dar solución al problema geométrico de rectas tangentes se basó en la construcción previa de la recta normal, también de forma puramente algebraica. Quedó presentado en el segundo libro *La Géométrie* de 1637 en los siguientes términos:

> Encontrar una circunferencia tangente en un punto C a una curva dada. Esto se hace igualando circunferencia y curva y obligando a que sólo se corten en un punto. Ya que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio, como decía Euclides, esta recta es fácil de calcular (DESCARTES, 1637, p. 37).

Se observa un proceder de la siguiente forma (Figura 23 en la página seguiente):

Figura 23 - Método de Descartes para determinar la recta tangente a una curva en un punto



Fuente: Elaboración propia.

Considera la curva AFE, toma un punto F sobre la curva F. Seguido, considera la familia de circunferencias que pasa por el punto F y que se trazan haciendo centro en diferentes puntos P ubicados en la prolongación de AM; con el objeto de encontrar la normal en dicho punto. Esto en términos de notación moderna es: supone que la ecuación de la curva es $x = f(y) = \sqrt{y}$. La circunferencia C, con centro en P y que pasa por el punto F, tiene por ecuación $(v - y)^2 + x^2 = s^2$. De ahí que al sustituir x^2, se tiene $(v - y)^2 + \sqrt{y}^2 = s^2$ que equivale a $y^2 + (1 - 2v)y + v^2 - s^2 = 0$. Esta circunferencia corta a la curva AFE en dos puntos, uno es F. Las dos soluciones de y determinan las primeras componentes de F y del otro punto que podemos llamar Q; hacemos que haya solo una solución única cuando el discriminante sea igual a cero, luego:

$$y = \frac{-(1 - 2v)}{2}$$

implica que

$$y + \frac{1}{2} = v.$$

como la recta normal es perpendicular a la recta tangente es decir $m_1 m_2 = -1$, se tiene:

$$m_2 = m(T_F) = \frac{-1}{m(PF)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \triangleq.$$

De esta forma Descartes desarrolló un método algebraico para determinar la recta tangente a una curva en un punto, sin embargo, este método se torna laborioso para curvas con expresión compleja, por lo cual este método es útil para curvas $y = f(x)$ tal que $\left(f(x)\right)^2$ sea un polinomio sencillo. Este método de Descartes y las Reglas de Hudde tendrían posteriormente una fuerte influencia sobre Newton. Se resalta que Descartes incorpora nuevas curvas, las construidas por su mecanismo articulado, esto es las que se pueden representar mediante ecuaciones algebraicas; para las que existen procesos que permiten el trazado de sus normales y tangentes, pero excluye aquellas curvas que no puedan ser representadas mediante ecuaciones, que denomina *mecánicas* y que más tarde Leibniz llamará *trascendentes*.

LOS APORTES DE BARROW

Barrow utiliza la idea de la tangente como el límite de las secantes para aplicar el método de Fermat a curvas dadas en forma implícita: $f(x, y) = 0$ a pesar de que mantenía la idea griega que la tangente era la recta que cortaba a la curva en un solo punto. A pesar de ello planteó la idea de primitivas en los siguientes términos: Dada una función $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cualquier función $H: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y verifique que $H'(x) = h(x)$ para todo $x \in (a, b)$ se llama una primitiva de f en el intervalo $[a, b]$. Es importante advertir que en matemáticas modernas sabemos que no todas las funciones tienen primitivas. Por ejemplo, una condición necesaria que debe cumplir una función para tener primitivas es que dicha función tenga la propiedad del valor intermedio pues, las funciones derivadas tienen esa propiedad, cuya consecuencia es el teorema del valor medio.

Entre sus aportes se destaca la *Regla de Barrow*, también conocida hoy como *teorema de Barrow*, indica: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y suponiendo que g es una primitiva de f en $[a, b]$ entonces: $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$. En términos de las matemáticas modernas es: la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $g(x)$ de $f(x)$, en los extremos de dicho intervalo.

Veamos la demostración en términos de matemáticas modernas: sea $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ aplicando el teorema del valor medio, se tiene:

$$\mathrm{h(b)} - \mathrm{h(a)} = \sum_{k=1}^{n} \left(h(x_k) - h(x_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,(x_k - x_{k-1}) = \sigma(f, p).$$

La igualdad anterior dice que para toda partición P de $[a, b]$ hay alguna suma de Riemann de f asociada a dicha partición σ (f, p) que es igual a $h(b) - h(a)$. Si ahora tomamos una sucesión $\{Pn\}$ de particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $\Delta(Pn) \rightarrow 0$, tenemos que

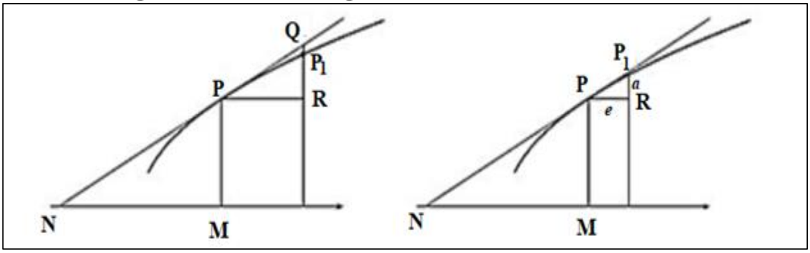
$$h(b) - h(a) = \sigma\,(f, p)$$

para alguna suma de Riemann $\sigma\,(f, Pn)$ de f asociada a la partición P_n pero sabemos que $\sigma\,(f, p) \to \int_a^b f$ por lo que se obtiene

$$h(b) - h(a) = \int_a^b f \quad \triangleq.$$

Un elemento interesante en esta demostración es que en la regla de Barrow no supone que *f* sea continua sino tan solo que es integrable y que, además, tiene una primitiva. Elementos que permiten inferir que Barrow enunció claramente la actual definición de límite de una función. Otro de los aportes a destacar es *el triángulo diferencial de Barrow*. Mientras editaba las obras de Euclides, Apolonio y de Arquímedes, publicó sus propias obras *Lectiones Opticae* en 1669 y *Lectiones Geometricae* en 1670 donde destacó el uso de la geometría que los antiguos implementaron; en la *Lectiones Geometricae* considerado uno de los principales aportes al cálculo, Barrow hace un tratamiento detallado de problemas incluyendo conceptos como tiempo y movimiento, usa métodos infinitesimales y métodos de indivisibles. Una de las herramientas a las que saca un gran partido es el *triángulo característico* o *triángulo diferencial* (Figura 24). Lo que se destaca aquí es que Newton fue su colaborador en la edición de dichas publicaciones, otras situaciones que nuevamente marcan la influencia en la posterior obra que desarrollará Newton.

Figura 24 - Triángulo diferencial de Barrow



Fuente: Elaboración propia.

Partiendo del triángulo PRQ, que resulta de un incremento PR, este triángulo es semejante al triángulo PNM. La pendiente de la tangente $\frac{PM}{MN}$ es igual a $\frac{QR}{PR}$. Barrow afirma que cuando el arco PP_1 es muy pequeño es posible identificarlo con el segmento PQ de la tangente en P. El triángulo PRP_1 de la Figura 24, parte derecha, en el cual PP_1 es considerado a la vez como un arco de la curva y como parte de la tangente, es el triángulo característico o diferencial. Este triángulo ya había sido usado muchas veces por Pascal en otros problemas de cuadraturas. Barrow lo usa para calcular la tangente a una curva dada por una ecuación polinómica $f(x, y) = 0$, en un punto de la misma $P = (x, y)$ de la siguiente forma: suponemos $P_1 = (x + e, y + a)$ un punto de la curva próximo a P. Al sustituir estas coordenadas en la ecuación $f(x, y) = 0$, Barrow plantea que es posible rechazar todos los términos en los que no hay a, o, e (porque se anulan unos a otros por la naturaleza de la curva). Siguiendo el proceso rechaza todos los términos en los que a o e están por encima de la primera potencia, o están multiplicados ambos (porque, siendo infinitamente pequeños, no tienen valor en comparación con el resto. Después de estas operaciones calcula el cociente $\frac{a}{e}$ que es la pendiente de la curva en el punto P.

Con este procedimiento, Barrow estuvo cerca de descubrir la relación inversa entre problemas de tangentes y de cuadraturas, pero su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer uso efectivo de esta relación, quien logró probarlo fue Newton unos años más tarde. Veamos una adaptación apoyados en la Figura 25, sobre el trabajo en el que aparece esa relación, Newton Lección X, Proposición 11 de las *Lectiones Geometricae*, p. 156:

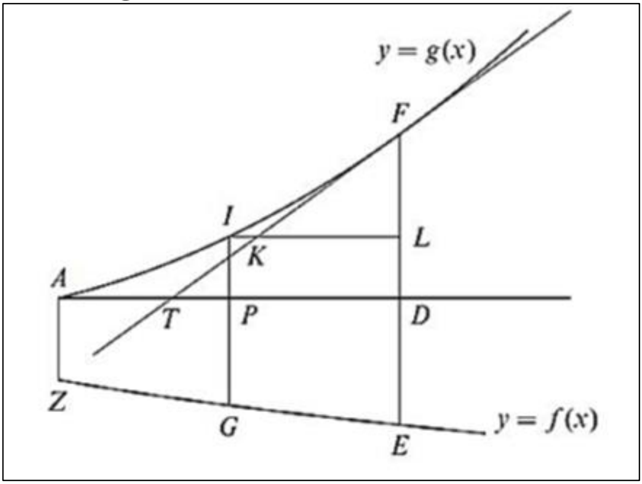
Se presentan dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$. El segmento AD representa el eje de las abscisas de donde se toman valores. La cantidad g(x) representa el valor del área bajo la gráfica de f comprendida entre el pinto A y x. Dado un punto de abscisa D, se trata de probar que la pendiente de la tangente a $y = g(x)$ en el punto F, es decir en el punto $(D, g(D))$ es igual a $f(D) = DE$.

La demostración de Barrow es geométrica

$\frac{DF}{DT} = F(D) = DE,$ queremos probar que FT es la tangente a $y = g(x)$ en el punto F, para ello veremos que la distancia horizontal KL, de cualquier punto L de la recta EF es menor que la distancia IL, de dicho punto L a la curva $y = g(x)$ esto probará que la recta FT queda siempre por debajo $y = g(x)$.

Como puede observarse la expansión lograda sobre la aplicación de estos métodos combinados con los resultados de Arquímedes se expandieron por la Europa del siglo XVI. Fue la época en que se enfrentaron variedad de problemas sin temor al paso al límite, al infinito ni a los números irracionales. Ello produjo una fusión de procedimientos con una base muy pobre, pero con resultados posteriormente potentes. Así este nuevo cálculo no solo se desarrolla, sino que contribuye a aclarar las ideas acerca de los objetos con los que se estaba trabajando. Por ello, es indudable que el naciente Cálculo infinitesimal llegó a constituirse en una de las grandes conquistas intelectuales de la humanidad, transformó las matemáticas como hasta entonces se conocían; la historia de las matemáticas ya no sería igual: la geometría, el álgebra, la aritmética y la trigonometría, se colocaron en una nueva perspectiva teórica, se articularon, se expandieron y surgió la necesidad de una justificación teórica rigurosa que las respaldara.

Figura 25 - Teorema fundamental



Fuente: Elaboración propia.

Es de resaltar que detrás de cualquier invento, descubrimiento o nueva teoría, existe, indudablemente, la evolución de ideas que hacen posible su nacimiento. Es muy interesante prestar atención en el bagaje de conocimientos que se acumula, desarrolla y evoluciona a través de los años para dar lugar, en algún momento en particular a rupturas epistemológicas que al ser detectadas a través de alguna persona en especial, surgen nuevas ideas, nuevos paradigmas que conllevan al nacimiento de nuevas ideas, de una nueva teoría, que seguramente se convertirá en otro eslabón de la cadena de descubrimientos importantes para el estado actual de la ciencia y, que merecen reconocimiento. El naciente Cálculo Infinitesimal cristaliza conceptos y métodos que la humanidad estuvo tratando de dominar por más de veinte siglos, lo interesante es que los supera cuando identifica rupturas epistemológicas, las usa para superarlas y se perfecciona. La madurez social, científica y matemática que permitiría fortalecer la construcción de ese naciente cálculo, se da con las obras de Newton y Leibniz.

A pesar que la historia muestra a Newton y Leibniz considerándolos como los inventores del cálculo, estos dos personajes solo representan un eslabón en una larga cadena, que como se mencionó anteriormente, fue iniciada desde la antigua Grecia. Sin embargo, estos dos hombres fueron quienes dieron a los procedimientos infinitesimales de sus antecesores, la unidad algorítmica y la precisión necesaria como método novedoso y de generalidad suficiente para su desarrollo posterior, elaborado a partir de visiones como las de Torricelli o Cavalieri quienes usaron de manera sistemática técnicas infinitesimales para resolver este tipo de problemas, compararon áreas, volúmenes de los "indivisibles" que conforman una figura con los que conforman otra, deduciendo que, si aquéllas se hallaban en una determinada relación, también lo estaban en esa misma las de las figuras correspondientes. Se descompuso figuras en indivisibles de magnitud inferior; para calcular volúmenes, se cortaban cuerpos y se midió las áreas de las secciones. Trabajos que suponen una ruptura con los procedimientos previos de los griegos y los empleados por Kepler o Galileo. Por ejemplo, la justificación que hizo Galilei: el espacio recorrido por un móvil es igual al área comprendida entre la curva de la velocidad y el eje del tiempo. Esta idea fue importante, porque unificó dos problemas de orígenes bien diferentes, la longitud de una curva y el área bajo otra. O el de Kepler que estudio la manera de hallar el volumen de cuerpos de revolución, descomponiéndolos en partes indivisibles de la forma adecuada a cada problema, lo que le permitió hallar el volumen de más de noventa cuerpos diferentes.

EL CÁLCULO DE NEWTON, EL DE LEIBNIZ Y UN PARALELO ENTRE DICHOS CÁLCULOS

Como se mostró anteriormente, la influencia del trabajo de los antecesores a Newton fue fuerte en el desarrollo de su obra. Se destaca que Newton trabajó en diversos aspectos, su visión fue general e impuso su punto de vista físico desde la mecánica. Se destaca que para investigar la razón de cambio del "*momentum*" aclaró lo que entendía por velocidad; la definió como la razón de cambio de posición. La solución que dio a este problema le generó un método matemático para investigar la velocidad de cualquier partícula que se mueve en cualquier forma continua. Le proporcionó permítanme expresar el término, la llave maestra, de todo el misterio de las razones y su medida que hasta la época no habían podido ser superadas, esta llave fue: el Cálculo Diferencial. Ante la pregunta ¿Cómo se puede calcular la distancia total recorrida en un determinado tiempo por una partícula en movimiento cuya velocidad varía continuamente de un instante a otro? desde planteamientos geométricos Newton llego al Cálculo integral. Se destaca que Newton no publicó los trabajos que iba escribiendo, sino que los divulgaba entre sus alumnos y conocidos, por miedo a las duras y soberbias críticas de los matemáticos de la época. Ya casi al final de su carrera examinó conjuntamente los dos tipos de problemas que había abordado y conforme a las experiencias obtenidas con su maestro Barrow, logró un descubrimiento importante: encontró que el Cálculo diferencial y el Cálculo integral están íntima y recíprocamente relacionados; lo logró estudiando el área bajo una curva por métodos de anti diferenciación, primero investigó la variación del área al variar la abscisa. Definiendo lo que en matemáticas modernas conocemos como *teorema fundamental del Cálculo* usando la propiedad de aditividad del área. Para Newton todas las funciones eran continuas, ya que se trataba de las trayectorias de movimientos continuos, dado que era el concepto que en su tiempo se tenía de continuidad

Unió dos problemas previos: las tangentes y la integración. De esta forma relacionó los *indivisibles* con los métodos de hallar tangentes. Al hacerlo encontró que los procesos están íntimamente conexos. Entre los métodos de derivación encontrados, dejó la regla de la cadena, entre los de integración: el de sustitución y la propiedad de linealidad. Elementos que le permitieron construir tablas de derivadas e integrales. Para 1666 introdujo el método de las *fluxiones*, hoy conocido como derivadas. Este método es la clave general en cuya virtud las Matemáticas Modernas revelan el secreto de la Geometría y, en consecuencia, de la naturaleza. El obispo de Berkeley atribuye a Newton las siguientes palabras: "Si he ido algo más lejos que los otros, ello es debido a que me coloqué sobre los hombros de gigantes"[40]. Aquí lo que Newton hace es reconocer el trabajo de sus antecesores y la fuerte influencia que marcaron en su vida y obra.

Para tener la perspectiva científica e histórica apropiada de la fuerte influencia de sus antecesores, debe reconocerse que una de las contribuciones previas y decisivas al cálculo, fue la creación de la Geometría Analítica desarrollada independientemente por Descartes y Fermat. Descartes al principio encontró dificultades con su nueva geometría. A pesar de ello, buscó relacionar esa geometría analítica con la mecánica; otro elemento a considerar en los aportes de Kepler y Galilei. De Kepler, sus tres leyes fundamentales del movimiento planetario, mientras que de Galilei heredó las dos primeras de las

[40] Newton, I. «Letter from Sir Isaac Newton to Robert Hooke». *Historical Society of Pennsylvania*.

tres leyes del movimiento que serían posteriormente, la piedra angular de su propia dinámica.

De las conferencias sobre Geometría de su profesor Isaac Barrow, Newton se ocupó entre otras cosas de sus propios métodos para calcular áreas y trazar tangentes a curvas, que eran esencialmente los problemas clave de los Cálculos diferencial e integral. La influencia fue tal que, en 1665, Newton muestra que había desarrollado suficientemente los principios del cálculo para poder encontrar la tangente y curvatura en cualquier punto de cualquier curva continua. En ese documento llamó a su método "*fluxiones*", por la idea de "fluir" o cantidades variables y sus razones de "flujo" o "crecimiento". De Barrow, Newton aprendió a considerar las curvas desde un punto de vista cinemático: su análisis de curvas fue un análisis de puntos en movimiento. Cuando un punto A se movía a lo largo de una curva, su abscisa x, o su ordenada y, o cualquier otra cantidad variable relativa a la curva aumentaba o disminuía, cambiaba: fluía. A estas cantidades que fluían las llamó "*fluentes*" y a sus velocidades de cambio, a sus variaciones instantáneas con respecto al tiempo, las llamó "*fluxiones*". De esta manera el cálculo estaría fundamentado con un concepto más natural, el movimiento y el objeto del mismo sería el de una relación entre cantidades fluentes, así como encontrar la relación entre sus fluxiones. En 1676, Newton escribe su tercer manuscrito sobre el cálculo: *De quadratura curvarum*, que no añade nada nuevo a lo escrito en su tratado de fluxiones pero que revela una voluntad de rigor en el tratamiento de los infinitos.

Hasta ese momento Newton se habría movido en un contexto heurístico y de descubrimiento. Con las fluxiones evitaba los peligros de los infinitésimos, pero no se salvaban con ellas completamente las acechanzas de los procesos infinitesimales, pues la velocidad instantánea conllevaba un «*paso al límite*» que no estaba justificado. Newton quería que su matemática siguiera los cánones clásicos de la geometría griega. En su Philosophiae *Naturalis Principia Mathematica*, quedaba claramente manifiesta esa voluntad geometrizante de respetar: el rigor euclideo, la manera de hacer de los antiguos matemáticos griegos, la manera de Arquímedes. Conservando este legado, el Libro I de los Principia comienza con unas reflexiones sobre “el método de las primeras y últimas razones”, cuya esencia queda reflejada en el Lema I de ese libro:

> Quantities and the ratios of quantities, which in any finite time converge continually to equality, and, before the end of that time approach nearer to one another by any difference become ultimately equal (NEWTON, 1711, p. 36).

En Mateus-Nieves (2021b) se indica que el objeto de ese Lema fue mantener el rigor euclideo, evitar las tediosas y largas deducciones por “reducción al absurdo” que el riguroso método de exhausción de los matemáticos griegos exigía. De esta manera, las demostraciones, que se agilizaban usando “cantidades” infinitesimales, vuelven a tener el rigor de lo geométrico con este método de sumas y razones, últimas de cantidades evanescentes, que es claramente un precursor del concepto de “límite”, mediante el que Cauchy y Weierstrass, ya a finales del siglo XVIII e inicios del siglo XIX, darán completo rigor al cálculo infinitesimal y que miraremos al detalle posteriormente. Aquí las nociones fundamentales son las de variable, función y límite. Para Newton, las nociones de variable y límite fueron intuitivas. Representó variables por letras, igual que lo hacemos hoy. La palabra función (o su equivalente latino), parece que fue introducida en las Matemáticas por Leibniz en 1694. Fecha desde la que el concepto ha sido precisado con el paso del tiempo. Si y y x son dos variables tan relacionadas que siempre que se asigne un valor numérico a x, se determina un valor numérico de y, y se llama función uniforme de x, lo simbolizó escribiendo $y = f(x)$.

Newton imaginaba una curva como una ecuación $f(x, y) = 0$, donde x e y eran funciones del tiempo; es decir, partía de la imagen cinemática de curva como trayectoria de un móvil. La velocidad en cada punto tenía como componentes las velocidades según las direcciones de los ejes, $\overline{x}$ e $\overline{y}$; funciones que el denominaba fluxiones. Para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto calculaba el cociente $\frac{\overline{y}}{\overline{x}}$. (Hay que señalar que esta notación la usó solo hasta 1690). De esta manera, calculaba las tangentes fácilmente. Se propuso el problema inverso: conocido el cociente

$$f(x) = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$$

se preguntaba ¿cómo hallar y en función de x? para lo que estudió casos particulares de la función f y de las variables que en ella intervienen. Equivalente a lo que hoy se conoce como resolución de ecuaciones diferenciales o anti diferenciación.

Entre sus principales obras se destacan: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada en 1687, el tratado sobre *Cuadratura de Curvas*, (*De Quadratura Curvarum*) de 1693, *Opticksen* de 1704, y De *analysis* publicada en 1711 donde expone la teoría de la gravitación universal. A lo largo de esta producción científica se pueden distinguir algunos temas centrales como el desarrollo en serie de potencias, en especial el desarrollo del binomio, algoritmos para hallar raíces de ecuaciones y de inversión de series, relación inversa entre diferenciación e integración. También se identifican elementos centrales en óptica, dinámica, alquimia, cronología de la historia y en la interpretación de las sagradas escrituras.

Newton mandó a sus amigos, entre ellos Wallis, en 1669 la monografía *De Análysis* con ideas esenciales de su cálculo. Él mismo, da un procedimiento para hallar la ordenada de una curva cuya cuadratura ABD está dada. El proceso es de alguna forma el comienzo del cálculo diferencial e integral, donde se ve el papel inverso que juegan la diferenciación y la integración. Lo explica con un ejemplo, claramente generalizable: considera la curva: $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ para facilitar los cálculos, eleva al cuadrado la relación anterior y obtiene $z^2 = \frac{4}{9}x^3$, por la elección hecha para *v* también tiene:

$$(z - ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3,$$

esto es:

$$z^2 + 2zov + o^2z^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3)$$

simplifica y obtiene $z^2 = \frac{4}{9}x^3$. En cada lado de esta expresión divide por “o” queda:

$$2zov + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2).$$

luego toma *B* infinitamente pequeño, lo que implica que $v = y$, y que los términos que contienen “*o*” se anulan, de donde:

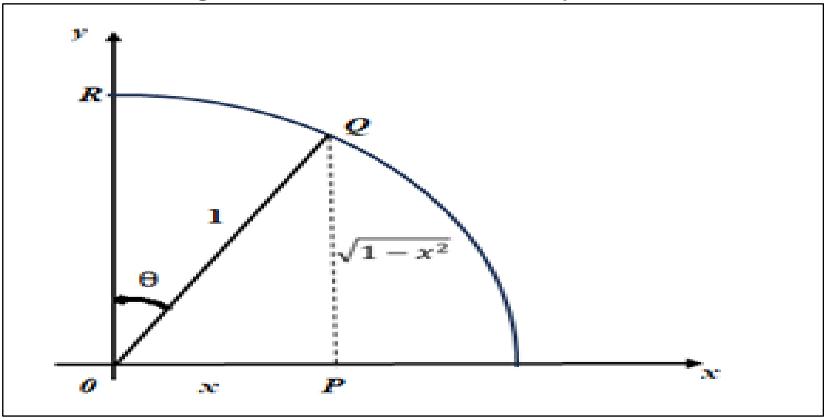
$$2zy = \frac{4}{3}x^2,$$

sustituye ahora el valor de *z*, y resulta $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Newton introduce un método iterativo para resolver ecuaciones que llevan su nombre. Toma como ejemplo resolver la ecuación: $y^3 + 2y - 5 = 0$. Observa primero que $y = 2$ es una aproximación de la solución. Escribe luego $y = 2 + p$ y lo sustituye en la ecuación para encontrar: $p^3 + 6p^2 + 10p - 12 = 0$. Como p es pequeño, elimina los términos p^3, $6p^2$, para obtener $10p - 1 = 0$, de donde $p = 0{,}1$. De este modo $p = 2{,}1$ es la segunda aproximación de la raíz buscada. Toma ahora $p = 0{,}1 + q$, que sustituido en la ecuación para p da: $q^3 + 6 \cdot 3q^2 + 11.23q + 0{,}061 = 0$. Toma otra vez su parte lineal $11{,}23q + 0{,}061 = 0$, obtiene $q = -0{,}0054$, lo que da el nuevo valor aproximado de la solución $y = 2.0946$. Newton da un paso más en este ejemplo escribiendo $-0.0054+r = q$, y después sustituye en la ecuación para q y sigue el mismo proceso hasta llegar de este modo a la nueva aproximación $y = 2.09455147$.

Para el cálculo de áreas necesitaba conocer los puntos de corte de la curva con el eje. Con ese motivo inventó el llamado *método de Newton* para calcular raíces aproximadas y que hoy día se sigue usando tal como él lo desarrolló. Hay que señalar, no obstante, que él no hace la interpretación geométrica habitual del método, sino que su versión se basa en realizar pequeñas variaciones de la variable e ir aproximando la función como si fuera una serie. Utiliza funciones implícitas $f(x, y)$, necesita despejar y en función de *x*; de ahí que su idea para el cálculo de raíces no sea geométrica, sino que trata de obtener la variable y como una serie en la variable x, para después integrar término a término. Este uso no rusticado de las series (y otros posteriores) no le pasó desapercibido, el resultado fue el descubrimiento de las series de $sen\, x$ y $\cos x$. Lo extiende a su binomio, para encontrar series trigonométricas. Considera la circunferencia de radio 1, Figura 26.

Figura 26 - Funciones $\boldsymbol{sen\,\theta}$ y $\boldsymbol{\cos\theta}$



Fuente: Boyer (1986, p. 29).

Es x = OQ = $sen\, x$, esto es igual a $arcsen\, x$, de manera que: $\theta = 2\ \acute{a}rea\ OQR$ equivalente a

$$2[\acute{a}rea\ (ORQP) - \acute{a}rea\ (OQP)] = 2\left[\int_0^x \sqrt{1-x^2}\ dx - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right].$$

Por el desarrollo del binomio:

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^{16}}{16} - \cdots$$

integra término a término y obtiene

$$\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \uparrow \cdots$$

mientras que:

$$x\sqrt{1-x^2} = x\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^{16}}{16} - \cdots\right)$$

sustituye, simplifica y obtiene:

$$\theta = x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} + \cdots$$

invierte la serie y obtiene:

$$x = sen\,\theta = \theta - \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{112} + \cdots$$

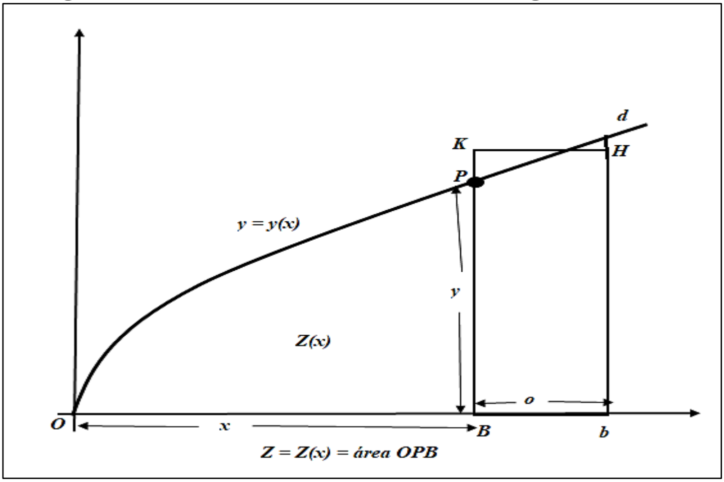
encuentra luego la serie de $\cos x = \sqrt{1 - sen^2\theta}$. Calcula las cuadraturas de la cicloide y luego de la cuadratriz, de ecuación $x = y\ contsny$, primero invierte esta ecuación para encontrar la serie de $y = y(x)$ y luego integra término a término.

En *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, Newton entregó a su maestro Barrow en 1669 conceptos infinitesimales que contenían el teorema binomial y sus descubrimientos relativos a series infinitas, así como la relación inversa entre problemas de cuadraturas y tangentes. En este trabajo presentó la *Relación fundamental*, esto es: supone una curva y llama z al área bajo la curva hasta el punto de abscisa x (como se ilustra en la Figura 27), supone conocida la relación entre x y z; lo importante aquí es que Newton no usa el significado tradicional de la integral al estilo de sus predecesores, es decir, no ha interpretado la integral como el límite de sumas de áreas infinitesimales, sino que prueba que la expresión que proporciona la cuadratura es correcta estudiando la variación momentánea de dicha expresión. En otras palabras, lo que encontró fue que la razón de cambio del área bajo la curva es el cociente,

$$\frac{z(x+0)-z(x)}{0}$$

que se hace igual a la ordenada de la curva cuando se hace infinitésima. En términos actuales, la derivada de $z(x)$ es la función $y = y(x)$. La relación simétrica entre cuadraturas y derivadas quedó así manifiesta, situación que posteriormente se completó para conformar lo que hoy conocemos como *teorema fundamental del cálculo*. De ello, concluyó que, para evaluar cuadraturas, basta con calcular una antiderivada, el equivalente a lo que hoy llamamos *una primitiva de la función* $y = y(x)$.

Figura 27 - Relación fundamental según Newton



Fuente: Hall (1958, p. 39).

Leibniz se conoce principalmente por sus estudios sobre la cuadratura de curvas y desarrollo del cálculo diferencial e integral. De su cálculo se destacan las reglas para manipular los símbolos $\int$ de la integral y d para el diferencial. Esto refleja sus ideas filosóficas de busca de un lenguaje simbólico y operacional para representar conceptos e ideas del pensamiento, de tal manera que los razonamientos y argumentos se puedan escribir por símbolos y fórmulas. También se destacan la relación entre la suma de sucesiones con las diferencias de sus términos consecutivos y el llamado triángulo característico.

En una de sus estadías en Paris en 1672 conoce a Huygens, éste le planteó el problema de sumar los inversos de los números triangulares,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}+\cdots 1$$

Leibniz observó que cada término se puede descomponer como

$$\frac{2}{n(n+1)}-2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

de donde

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots-2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots-2.$$

Tal como hizo en la suma de la serie de los inversos de los números triangulares, considera sumas y diferencias de sucesiones de números. Observó que dada la sucesión $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$, si se considera la sucesión de diferencias $d_1, d_2, \cdots, d_n$, donde:

$d_1 = a_1 - a_{i-1}$ entonces $d_1, d_2, \cdots, d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$.

es decir, la suma de diferencias consecutivas es igual a la diferencia entre el último y el primer término de la sucesión original. Por ejemplo, dada la sucesión de cuadrados *0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...,* n^2. Sus primeras diferencias son: *1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 2n-1*. Ya que:

$$i^2 - (i-1)^2 = 2i - 1.$$

Se sigue que la suma de los n primeros números impares es n^2, asi:

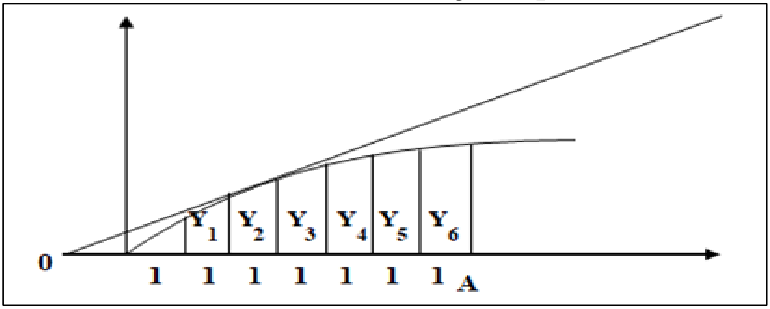
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Leibniz utiliza este método y lo relaciona con la serie geométrica 1, q, q^2, ⋯, q^n... que expresa como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Este modo de razonar le permitió aplicar a la geometría sus observaciones de que las sumas de sucesiones y sus diferencias consecutivas son procesos inversos el uno del otro. Consideró una curva como la de la Figura 28 donde aparece una sucesión de ordenadas equidistantes. y_1, y_2, ⋯,:

Figura 28 - Modelo para la cuadratura de una curva seguido por Leibniz



Fuente: Elaboración propia.

Supuso que la distancia entre estas ordenadas es 1, de ahí que su suma sea $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ una aproximación de la cuadratura de la curva, mientras que la diferencia entre dos sucesivas ji da aproximadamente la pendiente de su tangente. Además, cuanto más pequeña sea la unidad 1 elegida, mejor será la aproximación. Si la unidad se pudiera elegir infinitamente pequeña, entonces las aproximaciones serían exactas; la cuadratura sería igual a la suma de ordenadas y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de ordenadas. Leibniz consideró una curva como una poligonal de infinitos lados donde dy es la diferencia infinitesimal de dos ordenadas consecutivas, dx la diferencia de dos abscisas consecutivas, $\int y\, dx$ representa la suma de los pequeños rectángulos infinitesimales $y\ dx$. De esta forma el teorema fundamental del cálculo aparece como obvio. Esto es, para hallar el área debajo de una curva con ordenadas y, debemos hallar una curva de ordenadas z de tal manera que $\frac{dz}{dz} = y$, en cuyo caso también es la $\int y\, dx = z$. En la primera notación de sus manuscritos Leibniz escribe: $omn.$ 1 = y Donde omn es $omnia$, que en latín significa suma, y donde l son diferencias. Con ello empieza a desarrollar su cálculo y la expresión simplemente significa que la suma de las primeras diferencias de una sucesión que empieza por 0 es igual al último término. Posteriormente afina su notación y escribe la anterior relación como $\int y\, dy$ que es la usada actualmente. Para él, el signo integral no es más que una S elongada que significa suma. La idea de su cálculo es que las fórmulas y relaciones geométricas se realicen de manera casi automática por medio de reglas del cálculo de diferencias que actualmente se escriben:

1) $d(x+y) = dx + dy$.
2) $d(xy) = xdy + ydx$.
3) $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$. 4) $d(x^n) = nx^{n-1}$.

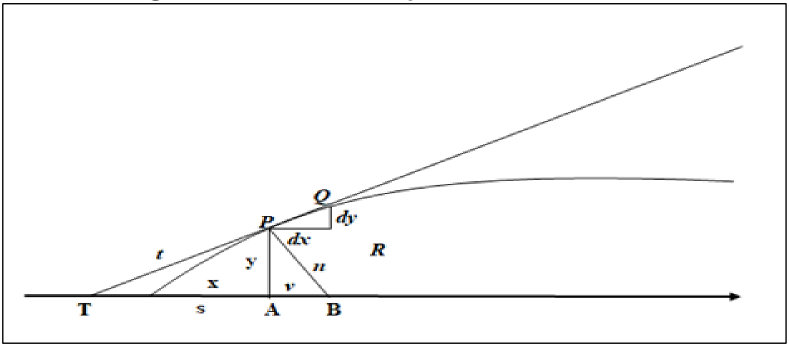
Para demostrar por ejemplo la regla 2) $d\ (x,\ y) = x\ dy + y\ dx$, calcula la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión producto xy: $d\ (x,\ y) = (x + dx)\ (y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy$ y luego omite la cantidad $dxdy$ por ser infinitamente más pequeña en comparación con los otros términos. De esta regla deduce la integración por partes a: $\int x\ dy = xy - \int y\ dx$, aunque las demuestra como teoremas, siempre que puede intentar relacionar sus operaciones analíticas con resultados geométricos familiares. Mateus-Nieves (2018) muestra que, para esta última integración por partes, se observa que también es la adición de áreas de la forma:

$$\int x\ dy + \int y\ dx = xy$$

Las aplicaciones geométricas las presenta: dado un punto $P(x, y)$ sobre una curva, Figura 29, aparecen las llamadas sub tangente $s = TA$, tangente $t = TP$, normal $n = PB$ y subnormal v =AB. Todas estas variables tienen entidad propia y están relacionadas unas con otras. Se tiene por la semejanza $ys = vy$, para cada una de estas variables se pueden considerar también sus diferencias. Si consideramos las diferencias dx y dy, el triángulo PQR se llama el triángulo característico y tiene la relación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}.$$

Figura 29 - Aplicaciones geométricas donde aparece el triángulo característico y la ecuación diferencial

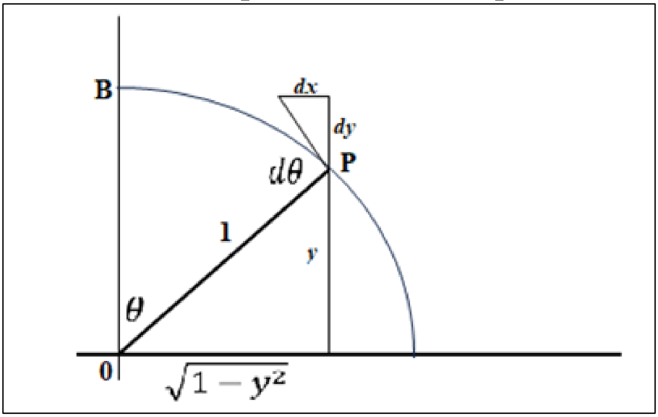


Fuente: Elaboración propia.

Leibniz tardó unos años en presentar estas ideas en público ya que era una formulación intuitiva, dado que se trataba de un trabajo con cantidades infinitamente pequeñas y esto no estaba rigurosamente definido ni era muy aceptable en matemáticas. Su primera publicación fue un corto artículo titulado *Un nuevo método para máximos y mínimos y tangentes, no impedido por cantidades racionales o irracionales y un singular nuevo tipo de cálculo para ellas* (*Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur* *et singulare pro illis calculi genus*) publicado en 1684 en *Acta Eruditorum*. En este trabajo prueba el principio ya conocido por Descartes y Fermat que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de refracción.

Leibniz utiliza series de potencias para resolver ecuaciones diferenciales. Por ejemplo considera la Figura 30 donde aparece el primer cuadrante de la circunferencia de radio 1, donde $P(x, y)$ es el ángulo que forma POB.

Figura 30 - Método para resolver ecuaciones diferenciales a partir de series de potencias



Fuente: Mateus-Nieves (2011).

Muestra que por semejanza de triángulos:

$$\frac{dy}{y} = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

y por el teorema de Pitágoras $dx^2 + dy^2 = d\theta^2$. Elevando al cuadrado la primera relación, despejando dx^2 y sustituyendo en la segunda, después de simplificar se obtiene:

$$dy^2 + y^2 d\theta^2 = d\theta^2$$

equivalente a la ecuación diferencial que verifica $y = sen\ \theta$. Para resolver esta ecuación considera d como constante y aplica el operador d a la ecuación. Obtiene:

$$d\ [dy^2 + y^2 d\theta^2] = 0.$$

por la regla del producto:

$$d\ [dy^2 + y^2 d\theta^2] = 2(dy)d\ dy + 2ydyd\theta^2 = 0$$

esto es:

$$\frac{d^2y}{d\theta^d} = -y$$

que es la ecuación diferencial de segundo orden para $y = sen\ \theta$. Equivalente al desarrollo del seno a partir de su ecuación diferencial.

En los párrafos anteriores se han descrito con detalle separadamente, algunas de las ideas de Newton y Leibniz en el desarrollo del cálculo veamos un contraste entre ambos procedimientos.

Cajori (1919) indica que Newton concibe la derivada de $y = f(x)$ como el cociente entre fluxiones $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, considera las fluxiones $\dot{x}, \dot{y}$ como las velocidades en que cambian los fluentes x, y. Su concepción es cinemática. En cambio, Leibniz considera el cociente $\frac{dy}{dx}$ entre diferencias. La integral para Newton es una integral definida, es el fluente a determinar para una fluxión dada. Para Leibniz la integral es una suma infinita de diferenciales. A pesar de estos contrastes en conceptos, ambos la calculan de la misma forma, como un proceso inverso a la derivada. Lo que permite inferir que ambos desarrollan el mismo cálculo desde puntos de vista distintos, en lo que si concuerdan es en observar cómo inversos los procesos de diferenciación e integración.

Hall (1980) plantea que tanto para Newton como para Leibniz este nuevo cálculo es universal, en el sentido en que se aplica del mismo modo a todo tipo de funciones. Lo aplicaron con éxito para calcular áreas como la cisoide o la cicloide, tangentes, longitudes de arco, problemas de máximos y mínimos, entre otros. Debido a su facilidad y al tratamiento que tuvo por parte de los hermanos Bernoulli y Euler[41] el cálculo de Leibniz empezó a cosechar grandes éxitos. Sus seguidores se preocupaban menos de sus aspectos lógicos y más de sus aplicaciones ya que era un cálculo eficaz que posteriormente permitió resolver problemas como el de la

[41] Leonhard Paul Euler, conocido como Leonhard Euler, matemático y físico suizo. Principal matemático del siglo XVIII, uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos.

braquistócrona[42] o de la catenaria[43] que habían sido intratables hasta entonces.

La difusión del método de fluxiones de Newton fue más lenta que el análisis de Leibniz, a causa principalmente del aspecto demasiado geométrico del método y de una notación simbólica menos eficaz que la de Leibniz. Sin embargo, a pesar de la publicación tardía de los trabajos de Newton, algunos matemáticos ingleses, Cotes, Stirling, Maclaurin y Taylor, discípulos de Newton, se esforzarán en desarrollar y difundir los métodos newtonianos. Merecen subrayarse los trabajos de Abraham de Moivre sobre el cálculo de probabilidades y trigonometría.

Los matemáticos ingleses, antes mencionados, se preocuparon más por los problemas de rigor lógico, cesando con ello su aplicación. A finales de 1690 Leibniz fue duramente atacado por los seguidores de Newton, quienes le acusaban de plagio. Su principal argumento fueron las cartas que Newton le había mandado vía Oldenburg. Al irse incrementando los ataques Leibniz pidió en 1711 a la Royal Society of London, de la que era miembro, para que interviniera en el asunto. La Royal Society nombró una comisión para que estudiara el caso y en 1712, movida por motivos de

---

[42] Braquistócrona o curva del descenso más rápido, es la curva entre dos puntos que es recorrida en menor tiempo, por un cuerpo que comienza en el punto inicial con velocidad cero, y que debe desplazarse a lo largo de la curva hasta llegar al segundo punto, bajo acción de una fuerza de gravedad constante y suponiendo que no existe fricción. La braquistócrona es la cicloide. Según el principio de Fermat: La trayectoria seguida por un haz de luz entre dos puntos es aquella que resulta en el menor tiempo de viaje. Por tanto, la curva braquistócrona sería simplemente la trayectoria de un haz de luz donde la velocidad luz se incrementa con una aceleración vertical (la de la gravedad). El problema de la braquistócrona usualmente se plantea en un plano vertical que contiene al vector tangente a la curva y a la dirección de la gravedad, pero el problema también ha sido planteado y resuelto cuando el movimiento de la partícula está confinado a una superficie curva como un cono o una esfera (O'CONNOR; EDMUND, 2000).

[43] La Catenaria curva cuya ecuación en notación moderna es: $y = eax+e-ax\ 2a$ donde a es una constante cuyo valor depende de los parámetros físicos de la cadena: su densidad lineal (masa por unidad de longitud) y la tensión a la cual está sometida. El descubrimiento de esta ecuación fue un triunfo del nuevo cálculo diferencial. Se atribuye el inicio del trabajo a Jakob Bernoulli, y finalizó Johan Bernoulli. Leibniz dijo que todos sabían que había sido su cálculo, la "clave" que había resuelto el misterio. Cabe recordar que a finales del siglo XVII problemas como el de la braquistócrona o el de la catenaria presentaban un desafío, y sus soluciones eran justamente consideradas con orgullo. Recordemos que la ecuación de la catenaria no fue dada originalmente como aparece en la formula anterior. El nuero e no tenía todavía un símbolo especial, y la función exponencial no era considerada una función por sí misma sino como la inversa de la función logaritmo.

nacionalismo y maniobrada por Newton, decidió que Leibniz había en efecto plagiado a Newton.

Leibniz en numerosas ocasiones califica a los infinitésimos como ficciones útiles. De la correspondencia que mantiene Leibniz con Jean Bernoulli a partir de 1693, se extraen numerosas referencias a ese extraño ente que no siendo un número concreto participa evanescentemente de lo numérico. Recordemos que un infinitésimo era el sustituto de un indivisible. Los indivisibles, o lo que es lo mismo, los segmentos rectilíneos que "ocupaban" un recinto plano, mediante los cuales Cavalieri conseguía, aun sin demasiado rigor, importantes resultados geométricos que se habían convertido en rectángulos infinitesimales, uno de cuyos lados, obviamente no siendo de magnitud cero, era sin embargo menor que cualquier número, por pequeño que este fuese. Ahora, de manera también no rigurosa según los cánones euclídeos, se podían "sumar" esos infinitos rectángulos infinitesimales. Posteriormente la idea de infinitésimo como magnitud infinitamente pequeña se generalizó también en aritmética.

Independientemente de la relación que pueda existir en Leibniz entre lo infinitesimal y su dinámica, es posible extraer tres cuestiones: La existencia o no del infinitésimo en las matemáticas o en la realidad física. La relación con su monadología, si es que la hubo. La opinión de Leibniz sobre una polémica que se montó entre los matemáticos Varignon y Rolle acerca de un cierto texto suyo, en el que se tenía la intención de "divulgar" o explicar tan controvertido ente. Donde Leibniz mantiene la no existencia real de los infinitésimos. Este fue uno de los temas que tuvo intensa correspondencia entre Leibniz y Johann Bernoulli para 1698. Aun se mantenía vigente el problema, desde Aristóteles, de la existencia o no del infinito en acto, del infinito actual. Y la afirmación de Leibniz, de estar a favor de la existencia del infinito actual en la Naturaleza, condujo a duda a Bernoulli, que no veía razón para negarla cuando de matemáticas se trata. Solamente Cantor, el dominador del infinito actual, a finales del siglo XIX criticó fuertemente a Leibniz por su ambigüedad con relación a este tema.

Por otra parte, a la pregunta de si Leibniz pudo inspirarse en la idea de infinitésimo para concebir la mónada, pasando de la matemática al dominio de la metafísica, los expertos leibnizianos confirman reservas. Para Leibniz, es bastante obvio que la capacidad de trascender la oposición finito-infinito del cálculo diferencial irradiase su poder a la física y a la metafísica. Y un ente como la mónada que, siendo el constituyente inextenso de la materia, no es un punto matemático, guarda un notable parecido con un ser que no siendo un número participa de lo cuantificable, como lo es un infinitésimo. Para Leibniz las mónadas no fueron nunca infinitésimos o partes infinitesimales de la materia, porque la materia, que es cuantificable, en tanto que tal, se rige por la matemática y una parte infinitesimal de materia no es algo concreto, no existe. Existe, eso sí, la posibilidad de la divisibilidad infinita.

Ahora miremos un paralelo entre los cálculos de Newton y Leibniz. Ambos sintetizaron dos conceptos sobre métodos infinitesimales usados por sus predecesores y que hoy llamamos *Derivada* e *Integral,* lo que es claro, es que, sin la contribución de todos sus antecesores, seguramente el cálculo de Newton y Leibniz no existiría. Su construcción fue parte importante de la revolución científica que vivió Europa en el siglo XVII. A diferencia de Newton, Leibniz sí publica sus investigaciones en *Actas* con un título largo, pero con un desarrollo concreto y objetivo: (*Un nuevo método para los máximos y mínimos, así para las tangentes, que no se detiene ante cantidades fraccionarias o irracionales y es un singular género de cálculo para estos problemas)*. Los nuevos métodos enfatizaron la experiencia empírica y la descripción matemática de nuestra relación con la realidad.

En el tratado sobre fluxiones en 1666 que Newton escribió, obra que no publicó pero que compartió con colegas para que fuera revisada; generó mucha influencia sobre la dirección que tomaría el cálculo. Se destaca su idea de pensar en una partícula que dibuja una curva con dos líneas que se mueven, representan las coordenadas. Denota la velocidad horizontal: x' y la velocidad vertical y'; las nombra: *fluxiones de* x y y asociadas con el flujo del tiempo. Los fluentes o cantidades flotantes eran x y y mismas. Con esta notación de fluxión, $y'\ x'$ define la tangente a $f(x,y)=0$. Presenta la expansión en series para $sen\, x$ y cos x, también muestra la expansión de lo que hoy se conoce como la extensión en serie de la función exponencial; pero esta función no quedaría establecida como tal hasta que Euler introdujo la notación actual e^x.

En su obra *Tractatus de Quadrarura Curvarum* escrita en 1693 y publicada en 1704 como un apéndice de su *Optiks*, Newton presenta un acercamiento que involucra el cálculo de límites; dice: en el tiempo en que x al fluir se convierte en $x + o$, la cantidad x^n se convierte en $(x+0)^n$, es decir, por el método de series infinitas,

$$x^n + n \cdot 0 \cdot x^{n+1} + \frac{nn-n}{2} \cdot 0 \cdot 0x^{n-2} + \cdots$$

al final deja que el incremento o desaparezca tomando límites.

Por otro lado, Leibniz conoció a Hooke y a Boyle en Londres en 1673, conoce y se motiva por las obras de Barrow, hecho que hizo a Leibniz sostener una larga correspondencia con Barrow. Al volver a París, Leibniz realizó un trabajo sobre el cálculo, pensando en los fundamentos de manera muy distinta a los de Newton, que consideraba que las variables cambiaban con el tiempo. Leibniz pensaba que las variables x, y variaban sobre secuencias de valores infinitamente cercanos. Introdujo a dx y dy como las diferencias entre valores consecutivos de esas secuencias. Sabía que $\frac{dx}{dy}$ da la tangente, pero no la usó como una propiedad que defina. Para Newton, la integración consistía en encontrar flujos para una fluxión dada lo que se implica el hecho, que la integración y la diferenciación son inversas.

Leibniz usaba la integral como una suma, de forma muy similar a la de Cavalieri. Usó los "infinitesimales" dx y dy mientras que Newton usaba x' y y' que eran velocidades finitas. Por supuesto que ni Leibniz ni Newton pensaban en términos de funciones, ambos pensaron siempre en términos de gráficas. Para Newton, el cálculo era geométrico mientras que Leibniz lo llevó hacia el análisis. Leibniz estaba bien consciente de que encontrar una buena notación era sumamente importante y pensó en ella mucho tiempo. Newton, por otro lado, escribió más bien para él mismo y, como consecuencia, tendía a usar cualquier notación que se lo ocurriera. La notación d y $\int$ de Leibniz destacaban el aspecto de operadores que probaría ser importantes más adelante. Para 1675, Leibniz se había quedado con la notación,

$$\int y\,dy = \frac{y^2}{2}$$

escrita exactamente como se hace hoy. Sus resultados sobre cálculo integral fueron publicados en 1684 y 1686 con el nombre de *Calculus summatorius*; a pesar que el término "*cálculo integral*" fue sugerido por Jacobo Bernoulli en 1690 a Leibniz.

Los trabajos de Newton eran motivados por sus propias investigaciones físicas mientras que Leibniz conserva un carácter geométrico y, diferenciándose de su colega, trata a la "*derivada*" como un cociente incremental, y no como una velocidad. Leibniz no habla de "*derivada*" sino de "*incrementos infinitamente pequeños*", a los que llama diferenciales. Un incremento de x infinitamente pequeño se llama diferencial de x, y se anota dx. Lo mismo ocurre para y (con notación dy). Lo que Newton llamó "*fluxión*", para Leibniz fue un cociente de diferenciales $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. No resulta difícil imaginar que, al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y ni siquiera de función, los fundamentos de su cálculo infinitesimal fueran poco rigurosos. Lo que permite inferir que el cálculo de fluxiones de Newton se basa en algunas demostraciones algebraicas poco convincentes, y las diferenciales de Leibniz se presentan como entidades extrañas que, aunque se definen, no se comportan como incrementos. Esta falta de rigor, muy alejada del carácter perfeccionista de la época griega, fue muy usual en la época post renacentista y duramente criticada. Pasaron dos siglos hasta que las desprolijidades en los fundamentos del cálculo infinitesimal se solucionaran, y hoy aquel cálculo, potencialmente enriquecido, se muestra como uno de los más profundos hallazgos del razonamiento humano.

En medio de este arduo trabajo, surgen necesidades nuevas, hechos que hacen que Napier estudie y construya tablas de logaritmos en 1614, que luego fueron corregidas por Briggs en 1661, dando origen a los logaritmos tal como los conocemos hoy. Ello dio lugar a una nueva función que entonces no se entendía como tal y que pronto se relacionó con el área bajo la hipérbola de ecuación $y = \frac{1}{x}$. El primero que lo hizo fue Gregory, observando que dicha área no sólo verificaba la propiedad del producto, sino otras propiedades. Newton obtuvo una serie para calcular logaritmos, que originó otro de los problemas precursores de los trabajos posteriores del propio Newton y de Leibnitz: el manejo del infinito. Se hacía, pues, uso (sin ninguna justificación rigurosa) de las series de potencias, que eran obtenidas, en general, dividiendo polinomios por potencias crecientes. Sin embargo, en ningún momento se aclaraba qué significaba la suma o la convergencia de estas series. En 1697 con el trabajo de Gregory sobre el área de la hipérbole, aparecen ideas sobre la *continuidad*, afirma que el cálculo introduce una nueva operación, *el paso al límite*, que da lugar a números irracionales distintos a los obtenidos como raíces de números racionales.

LAS CONTRIBUCIONES DE ROLLE, LA FAMILIA BERNOULLI Y EL MARQUÉS DE L'HÔPITAL

Rolle[44] fue uno de los primeros críticos de este naciente cálculo infinitesimal argumentando que era inexacto. Planteó y demostró, bajo los estándares de la época, un teorema, que hoy lleva su nombre, en cálculo diferencial. Este teorema resultó necesario para demostrar el teorema del valor medio y la existencia de las series de Taylor. Solo hasta el siglo XIX Giusto Bellavitis lo nombró *teorema de Rolle*. Al respecto, Taylor en un intento de formalizar el rigor ausente en el cálculo infinitesimal, llegó a justificar todo proceso matemático utilizando solo incrementos finitos, aunque, sólo para funciones algebraicas. Mientras que los seguidores de Leibnitz centraron sus esfuerzos en clarificar los diferenciales. Ya avanzado el siglo, Rolle llegó a afirmar que el cálculo era una colección de ingeniosas falacias. Situación que ratifica que el desarrollo del cálculo, para esta época, se basó en la debilidad de sus fundamentos, situaciones que motivaron diversos argumentos en su contra. Escasamente los únicos que podían defenderse con garantías eran los seguidores de Leibnitz, que abogaron siempre por un manejo formal, donde era importante considerar el rigor; esta fue una preocupación constante, y más que el rigor, era el intento de fundamentar claramente las bases del cálculo.

[44] Michel Rolle (1652 - 1719), matemático francés.

Hoy se considera al teorema de Rolle como un caso especial del teorema del valor medio, veamos cómo lo expresó a partir del teorema del valor medio en los siguientes términos:

> Toma el teorema del valor medio que dice: Si $f(x)$: $[a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua que tiene derivada en cada uno de los puntos de (a,b), entonces existe $c\epsilon(a,b)$ talque $f(b) - f(a) = \frac{df}{dt}(c)(a,b)$. Para la demostración prueba primero el teorema suponiendo que la función f toma el mismo valor en los extremos del intervalo $[a,b]$, es decir $f(a) = f(b)[*]$. Bajo la hipótesis $[*]$ el teorema se denomina *teorema de Rolle*.

Demuestra que existe un punto c tal que $a < c < b$ y $\frac{df}{dx}(c) = 0$. Y considera los siguientes casos posibles para f:

- f es constante en (a,b), en cuyo caso en cualquier punto $c\epsilon(a,b)$ se tendría $\frac{df}{dx}(c) = 0$, ya que la derivada de una función constante es en todo punto igual a cero;
- f no es constante en $[a,b]$ y entonces, por la continuidad de la función, tendrá que existir al menos un punto $c\epsilon(a,b)$ donde la función f alcance su valor máximo o su valor mínimo en el intervalo $[a,b]$.

Esta última afirmación es cierta, pues si f alcanzara tanto su valor máximo como su valor mínimo en los extremos del intervalo $[a,b]$, con $f(a) = f(b)$, se tendría que f es constante en $[a,b]$ y ese no es ahora el caso, luego, o el valor máximo o el valor mínimo de f en $[a,b]$ se alcanza en el interior de $[a,b]$. Supone que es el valor máximo de f el que se alcanza en un punto c del intervalo abierto (a, b), es decir, $c \epsilon (a, b)$ y $f(c) \geq f(x)$ para toda $x \in [a, b]$. Evalúa la derivada de f en c y obtiene:

$$\frac{df}{dx}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

luego analiza el signo de $\frac{df}{dx}(c)$. Si la magnitud h de la variación de la variable independiente en $x = c$ se toma mayor que cero, el cociente diferencial tendría signo negativo, esto es:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \; si \; h > 0,$$

ya que $f(c+h) - f(c) \leq 0$ para todo $(c+h) \in [a, b]$, puesto que $f(c)$ es el valor máximo de la función en el intervalo. En vista de lo anterior, al tomar h valores positivos que tienden a cero, los cocientes diferenciales correspondientes serán siempre menores o iguales a cero y deberán tener como límite un número menor o igual que cero, esto es:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \frac{df}{dx}(c) \leq 0,$$

análogamente, si la magnitud de la variación h es negativa, el valor del cociente será siempre mayor que cero,

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \; si \; h<0$$

y, por tanto, su límite será también mayor o igual a cero:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{df}{dx}(c) \geq 0.$$

de las dos estimaciones anteriores, concluye que, si existe la derivada en $x=c$, se debe tener $\frac{df}{dx}(c)=0$, con lo que prueba la validez del teorema del valor medio en el caso particular que $f(a)=f(b)$. Para el caso general, $f(a)=f(b)$, considera la función auxiliar $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

que es una función derivable en (a,b) talque $g(b)=g(a)=0$. Luego, en virtud del caso anterior, existirá $c\epsilon(a,b)$ tal que $\frac{dg}{dx}(c)\geq 0$. Escribe esto último en términos de la función original f, y tiene

$$0=\frac{dg}{dx}(c)=\frac{df}{dx}(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

esto es $f(b) - f(a) = \frac{df}{dx}(c)(b-a)$, donde $c\epsilon(a,b)$, con lo que prueba el teorema general ≙.

El siguiente paso en el desarrollo del cálculo se da con el adelanto y profundización de los trabajos de Torricelli y Barrow. Los aportes del primero fueron continuados en Italia por Mengoli y Angeli con escasos resultados. El segundo dio un método de tangentes a una curva en el que la tangente está dada como el límite de una cuerda cuando los puntos se acercan uno a otro, conocido como triángulo diferencial de Barrow. Tanto Torricelli como Barrow estudiaron el problema del movimiento con velocidad variable. La derivada de la distancia es la velocidad y la operación inversa lleva de la velocidad a la distancia. De aquí empezó a evolucionar naturalmente una concienciación de la *inversa de la diferenciación* y que Barrow ya estuviera familiarizado con la idea de que *integral y derivada* son inversas una de otra. De hecho, aunque Barrow nunca afirmó explícitamente el teorema fundamental del cálculo, estaba trabajando hacia el resultado; fue Newton como se mencionó anteriormente, quien continuó en esa dirección para dar explícitamente el *Teorema Fundamental del Cálculo*. Por ello, es posible afirmar que Barrow fue probablemente el científico que estuvo más cerca de descubrir el cálculo, de ahí su fuerte influencia a su alumno Isaac Newton y a Leibniz en sus estrechas comunicaciones por carta.

En el desarrollo del cálculo infinitesimal se destaca la obra de la familia Bernoulli, entre ellos se enfatiza a Jacob, Jean y Johann Bernoulli[45], contribuyen fuertemente a la obra de Leibnitz. Escribieron el primer tratado de cálculo infinitesimal basado en los

[45] La familia Bernoulli (o Bernoulli) matemáticos y físicos suizos, irrumpen en el mundo científico a finales del siglo XVII. El fundador de esta familia fue Jacob quien se trasladó a Basilea en 1622 por motivos de persecución religiosa. Se casó tres veces y sólo tuvo un hijo, Nikolaus. Éste se casó y tuvo una docena, de los cuales cuatro llegaron a edad adulta; dos de ellos se convirtieron en matemáticos de primer orden: Jakob, nacido en 1654, y Johann, nacido en 1667. Ambos estudiaron la teoría del cálculo infinitesimal de Leibniz y desarrollaron aplicaciones de la misma.

métodos leibnicianos. En ese trabajo participaron Jacobo y Johann ambos hicieron esfuerzos para enlazar y mantener el razonamiento alcanzado, dado que, Berkeley publicó su *Analyst* en 1734, donde atacó la falta de rigor en el cálculo y contendió la lógica sobre la que se basaba. En esta dirección por mantener el razonamiento alcanzado, Maclaurin intentó poner el cálculo sobre una base geométrica rigurosa, aunque débil en sus inicios, y que solo sería fortalecida con los trabajos de Cauchy en el siglo XIX. Aquí es importante resaltar que a pesar de los grandes esfuerzos por dotar al análisis matemático de bases sólidas, solo a mediados del siglo XIX varias suposiciones sobre la estructura de los números reales utilizadas en la prueba de propiedades y suposiciones de funciones continuas, como por ejemplo la existencia de derivada en casi todos los puntos para toda función continua, serán señaladas críticamente y desmentidas por contra ejemplos por Bolzano y Weierstrass, quienes obtuvieron funciones continuas que no poseen derivada en ningún punto. Ese tipo de situaciones obligó al estudio y construcción del sistema de los números reales a partir del sistema de los números naturales. El sistema de los números reales se convirtió en la estructura algebraica adecuada al propósito del cálculo infinitesimal dado que, fueron precisamente los atributos y las relaciones expresables en términos de este tipo de números, donde se resalta la propiedad que distingue al sistema de los números reales del sistema de los números racionales: la propiedad de continuidad o completez. Esta propiedad, de carácter geométrico o topológico, es la que permite dar un sentido preciso a los conceptos fundamentales de límite y continuidad, sobre los cuales se desarrolla el cálculo diferencial e integral. Otra de las propiedades especiales del sistema de los números reales es que permitió definir los conceptos fundamentales para describir y estudiar cambio y movimiento, fundamentales en la física matemática. Estos resultados se darían para inicios del siglo XIX.

Con el pasar de los años, fueron apareciendo algunos de los conceptos que posteriormente fueron ratificados, otros rectificados, para finalmente institucionalizarse como nuevos entes matemáticos, entre ellos, términos como: *Función*: usado por primera vez en 1637 por René Descartes para designar una potencia x^n. Newton y Leibniz contribuyeron decisivamente al desarrollo del concepto dado que, descubrieron el desarrollo de funciones en serie de potencias. En esta época la idea de función era muy restringida, pues se reducía a funciones analíticas. Primero las que se podían expresar mediante una ecuación algebraica y poco después las desarrollables en serie de potencias. En 1755 Euler dio la primera definición de función: "Si algunas cantidades dependen de otras de manera que varían cuando varían las últimas, entonces se dice que las primeras son función de las últimas" (CALINGER, 1996, p. 96). *Variable*: Viète[46] usó letras para representar variables (normalmente X, Y, y Z para los números reales y N para los enteros). *Límite*: Wallis introduce el concepto de límite y el símbolo para el infinito. Newton y Leibniz ignoraban una definición precisa de límite y de los conceptos que éste lleva asociado, a pesar que la idea que tenían sobre límite era netamente intuitiva; sin embargo, cabe aclarar que los conocimientos de los límites fueron asentados solo hasta el siglo XIX por Cauchy, Dedekind [47] y Weierstrass, detallados más adelante.

El mismo Wallis propuso una genealogía del cálculo, en su orden: Método de exhaución de Arquímedes, Método de indivisibles de Cavalieri; Aritmética de infinitos de Wallis; Método de las series infinitas de Newton. Con estos avances en el cálculo, la geometría analítica amplió considerablemente el horizonte de las curvas

[46] François Viète (conocido como Francisco Vieta), considerado uno de los precursores del álgebra. Fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras.

[47] Julius Wilhelm Richard Dedekind, matemático alemán. Alumno de Moritz Abraham Stern y de Wilhelm Eduard Weber. Su tesis doctoral fue supervisada por Gauss, titulada *Über die Theorie der Eulerschen Integrale* (Sobre la teoría de las Integrales eulerianas), aunque en ella no se reflejaba el talento que mostró en sus trabajos posteriores, Gauss supo apreciar el don de Dedekind para las matemáticas, siendo el último alumno de Gauss (O'CONNOR, 2006).

geométricas, como ejemplo: los logaritmos, surgidos de la necesidad de ahorrar tiempo en los engorrosos cálculos usados por los astrónomos que tenían que realizar una enorme cantidad de multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces. A pesar que los logaritmos fueron descubiertos independientemente por Napier y Bürgi, en la segunda edición de la obra de Napier "*Logratimorun canonis descriptio…"* de 1619 incluía una explicación detallada de cómo se ha de elaborar una tabla de logaritmos no incluida en la primera edición de 1614. Este incremento de nuevas curvas hizo imprescindible el desarrollo de nuevos métodos para calcular tangentes. Entre ellos, el método de *adigualdades* de Pierre de Fermat. (Conocido también como el Método de las Raíces Iguales); que serviría además para calcular máximos y mínimos.

Relacionados con los problemas de las tangentes surgió a mediados del siglo XVII el llamado problema inverso de las propiedades de las tangentes, esto es, una curva a partir de las propiedades de sus tangentes. El primero en plantear el problema fue Florimond de Beaune, discípulo de Descartes, quien lo planteó como la necesidad de encontrar una curva con subtangente constante. El propio Descartes lo intentó resolver sin éxito, fue Leibniz quien lo solucionó y divulgó convirtiéndolo en la primera publicación de la historia sobre el cálculo infinitesimal. Elementos que permitieron llegar a un primer acercamiento al concepto abstracto de continuidad observando medios sólidos, líquidos y gaseosos; dado que todo medio físico representa la acumulación de un gran número de partículas distintas en movimiento.

Es así como el concepto de *derivabilidad* surgió tanto en Newton como en Leibniz, pero fue Leibniz quien utilizó en primer lugar la notación para indicar simbólicamente el paso al límite cambiando D por d. En este sentido, la manera de razonar de Newton estaba mucho más próxima a la forma moderna del cálculo, pero la eficacia de la notación diferencial de Leibniz hizo que se aceptase mejor la idea del diferencial que la de fluxión. La notación y' y $f'(x)$ fueron introducidas por Lagrange en el siglo XVIII. Se planteó y formalizo la *Regla de L'Hôpital o Regla de L' Hospital*, descubierta por Jean Bernoulli. Aunque se conoce como "Regla de L'Hôpital[48]", debido a que Bernoulli en su estancia en París enseñó matemáticas al joven marqués francés, Guillaume François Antoine de L'Hôpital y firmó con él un pacto, según el cual, a cambio de un salario regular, se comprometía a enviarle al marqués sus descubrimientos en matemáticas para que el marqués los utilizase a su voluntad (SOLAECHE, 1993). La regla en realidad es un teorema matemático que permite evaluar límites de formas indeterminadas utilizando derivadas. La aplicación simple o iterada de la regla convierte una forma indeterminada en una expresión que puede evaluarse fácilmente por sustitución.

L'Hôpital publica su primer tratado sobre cálculo diferencial e integral en París cerca de 1669, en cuya introducción reconoció deber este trabajo al joven Bernoulli que para su momento era profesor en Groninga. En una carta anterior de 1695, L'Hôpital señala a Bernoulli que está a punto de publicar un trabajo sobre las cónicas y que se propone añadirle un pequeño tratado sobre el cálculo diferencial. El cálculo diferencial firmado por L'Hôpital se desarrolla tal como había sido concebido por Leibniz, usa cantidades infinitesimales para establecer ciertas reglas de cálculo. Define el diferencial como la parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable es aumentada o disminuida de manera continua; llama la *diferencial* a esa cantidad. Para trabajar con infinitésimos establece la siguiente regla: Dos cantidades cuya diferencia es otra cantidad infinitamente pequeña pueden intercambiarse una por la otra. De esta forma, los escritos de los Bernouilli, Leibniz y L'Hôpital

[48] En cálculo diferencial, la regla de L'Hôpital o regla de L'Hôpital-Bernoulli usa derivadas para ayudar a evaluar límites de funciones que estén en forma indeterminada; se conoció en su obra *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* de 1692, y se considera el primer texto escrito sobre cálculo diferencial (SOLAECHE, 1993).

popularizaron el cálculo leibniziano desde la primera década del siglo XVIII logrando potenciar el concepto de derivada, manifiesto en las aplicaciones del cálculo a la física newtoniana. Pero no sólo se desarrolló, sino que el cálculo contribuyó a aclarar ideas acerca de los objetos con los que se trabajaba. De esta forma reaparecen ideas sobre continuidad, ya antes tratadas por Gregory que nuevamente afirma que el cálculo introduce una nueva operación, *el paso al límite*, dando lugar a números irracionales distintos a los obtenidos como raíces de números racionales. Por su parte, Wallis enuncia claramente la actual definición de límite de una función.

La regla de L'Hôpital establece que para funciones f y g que son diferenciables en un intervalo abierto I excepto posiblemente en un punto c contenido en I, si:

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$, ó $\pm\infty$, y $g'(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in I$, con $x \neq c$, y $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe,

Entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

la diferenciación del numerador regularmente simplifica el cociente o lo convierte en un en un límite que puede evaluarse directamente. A pesar que la forma general de la regla de L'Hôpital cubre muchos casos supone que las funciones de valor real f y g sean diferenciables en I, excepto posiblemente en c, y además $g'(x) \neq 0$ en I excepto posiblemente en c. También se supone que $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, hace que la regla se aplique a situaciones en las que el cociente de las derivadas tiene un límite finito o infinito, pero no a situaciones en las que ese cociente fluctúa permanentemente a medida que x se acerca cada vez más a c. Por ello, si alguno de los siguientes casos se tiene:

- $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = \infty,$

entonces se tiene que: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Aunque se ha escrito $x \to c$ en todo momento, los límites también pueden ser límites unilaterales ($x \to c^+$ o $x \to c^-$), cuando c es un extremo finito de I. En el segundo caso, la hipótesis que f diverge a infinito no se usa en la prueba; por tanto, mientras que las condiciones de la regla normalmente se establecen como se indica arriba, la segunda condición suficiente para que el procedimiento de la regla sea válido se puede establecer como $\lim_{x\to c} |g(x)| = \infty$. Sin embargo hay cuatro condiciones para la regla de L'Hôpital que son necesario considerar:

1. Indeterminación de la forma: $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ o $\pm\infty$.
2. Diferenciabilidad de funciones: $f(x)$ y $g(x)$ que son derivables en un intervalo abierto excepto posiblemente en un punto c contenida en I (el mismo punto desde el límite).
3. Derivada distinta de cero del denominador: $g'(x) \neq 0$ para todos x en I com $x \neq c$.
4. Existencia de límite del cociente de las derivadas: $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Cuando una de las condiciones anteriores no se cumple, la regla de L'Hôpital no es válida en general, por lo que no siempre se puede aplicar. Cabe aclarar que la diferenciabilidad de las funciones es un requisito porque si una función no es diferenciable, entonces no se garantiza que la derivada de las funciones exista en cada punto de I. El hecho de que I sea un intervalo abierto se basa en la hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy aportado muchos años después. La notable excepción de la posibilidad de que las funciones no sean diferenciables en c existe porque la regla de L'Hôpital solo requiere que la derivada exista a medida que la función se aproxima a c; aunque no es necesario tomar la derivada en c.

Con los aportes logrados hasta entonces, en 1694 Nieuwentij[49], adelanta otra arremetida contra la falta de claridad tanto en los trabajos de Newton como en la existencia dudosa de las diferenciales de orden superior de Leibniz. A pesar que acepta de manera general la exactitud de los resultados del nuevo cálculo, considera que estos están viciados por una cierta penumbra que algunas veces acarrea a absurdos. Reprocha la inexactitud de despreciar las cantidades infinitesimales en Newton, Barrow y Leibniz y juzga oscuros y peligrosos sus métodos de cálculo. Un año después, en 1695 Leibniz en las *Actas eroditorum* se defiende contra de este ataque de Nieuwentijt. Su respuesta fue imprecisa, mostró incertidumbre en cuanto a la naturaleza de las diferenciales; respondió hábilmente al hecho de despreciar cantidades infinitesimales, considerándolas como cantidades que pueden tomarse tan pequeñas o tan grandes como se quiera; en lugar de despreciarlas, se podrían siempre conservar como cantidades tan pequeñas como se desee, y afirmó que el error cometido sería menor que cualquier cantidad dada. La incertidumbre seguiría hasta que en 1701 Hermann[50] proporcionó una réplica más detallada de los

[49] Bernard Nieuwentij (1654-1718) físico y geómetra (COLLETE, 1993, p. 138).

[50] Jacob Hermann (1678-1733), alumno de Jakob Bernoulli (COLLETE, 1993, p. 142)

argumentos del geómetra holandés. La publicación del *Análisis de los infinitamente pequeños* de L'Hôpital en 1696 acrecentó en Francia críticas y ataques por parte de los cartesianos de la Academia de Ciencias de Paris. El mayor oponente fue Rolle[51] quien en 1691 calificó los trabajos de Leibniz, Berkeley y Newton, como argumentos efectivamente débiles y fácilmente refutables. Los argumentos de Jurin sobre la naturaleza poco insatisfactoria llevaron a Benjamín Robins a precisar la naturaleza de los métodos de fluxiones y de la primeras y últimas razones de Newton. Lo que generó una nueva discusión entre Jurin y Robins; estas disputas contribuyeron a precisar ciertos fundamentos del cálculo de fluxiones y del concepto de límite, obligando a los autores a prestar mayor atención a las bases lógicas del nuevo análisis.

La necesidad de crear rigor en las matemáticas, hace que se generen, permítame llamar dos bandos, uno con los seguidores de los métodos newtonianos y el otro con los métodos leibnizianos. Del primero, las matemáticas florecen con trabajos como los realizados por Brook Taylor, James Stirling, Roger Cotes, Abraham de Moivre, y Colin Maclaurin. Taylor enriqueció el método analítico de fluxiones creyó que era sólo un caso particular de una teoría más general, el método de incrementos (que ahora conocemos como cálculo de diferencias finitas), como lo había previsto Newton en *Methodus differentialis* en 1711. Taylor trabajó simbólicamente con diferencias finitas y obtuvo resultados en cálculo fluxional mediante argumentos límite dejando incrementos finitos tendientes a cero. Se resalta la expansión en series de Taylor, las series infinitas fueron de las más importantes áreas de investigación para Taylor, Stirling en su *Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum* de 1730, y de Moivre con su *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis* también en 1730. Uno de los propósitos principales al estudiar las series infinitas era

[51] Michel Rolle (1652-1719), cuyo renombre se debe a su teorema.

la investigación de las cuadraturas, el equivalente en términos leibnizianos a, *integración*. Sin embargo, sería un error pensar que las series infinitas eran la única técnica de integración de la que disponían los newtonianos, como erróneamente lo han sostenido algunos especialistas. Dado que en su *De quadratura,* Newton dejó un programa de investigación en integración finita que fue llevado a cabo, de manera notable, por Roger Cotes en su *Logometria* de 1714 y en *Harmonia mensurarum, sive analysis & synthesis per rationum & angulorum mensuras promotæ* de 1722.

Stirling se ocupó en mejorar la clasificación de las cúbicas de Newton en su obra *Lineæ tertii ordinis neutonian*æ de 1717, aplicó el método analítico de fluxiones al estudio de veintidós especies de curvas cúbicas clasificadas por Newton y le adicionó cuatro nuevas que no aparecían en la *Enumeratio* de Newton. Lo que permite observar la existencia activa de un grupo de matemáticos británicos durante las primeras décadas del siglo XVIII, que extendieron exitosamente las líneas de investigación presentes en los trabajos netamente algorítmicos que Newton dejó sobre análisis común y el nuevo análisis. Del múltiple trabajo de Newton se resalta la geometría proyectiva, desde las Cónicas de Apolonio, trabajadas por David Gregory y Edmond Halley en Oxford, hasta la restauración de los *Porismos* de Euclides por Rober Simpson y Matthew Stewrad en Glasgow y Edimburgo. Este trabajo de investigación produjo resultados innovadores en geometría proyectiva que aún en el siglo XIX fueron reconocidos por Michel Chasles (MANDELBROTE, 2002, p. 411). El estudio de la construcción orgánica de las curvas, curvas generadas por la intersección de líneas en movimiento, y la transformación por sombras de las curvas, fueron importantes áreas de investigación en este campo, a los que Maclaurin y Patrick Murdoch contribuyeron con nuevos resultados (MURDOCH, 1746, p. 120). George Davie, en su libro *The Democratic Intellect,* apodó la escuela de Simson y Stewart, a la que Maclaurin pertenecía sólo de forma marginal, dado que según Playfair (1808), era una “escuela caracterizada por el clasicismo, con una preferencia de la geometría sobre el álgebra, y por un interés por los fundamentos de la geometría y del método fluxional" (p. 256). A pesar de esto, no todos los matemáticos británicos se adhirieron al clasicismo geométrico, algunos prefirieron los métodos algorítmicos modernos. Simson y Stewart, por ejemplo, continuaron de manera exitosa una tradición en geometría proyectiva a la que habían pertenecido Pascal, Desargues, de La Hire, y Newton mismo. Los que se adhirieron en el siglo XVIII a la tradición griega fue una minoría.

LAS CONTRIBUCIONES DE TAYLOR Y MACLAURIN

El desarrollo alcanzado por los Cálculos Diferencial e Integral se incrementa con la obra de Brook Taylor. El descubrimiento en 1715 de las llamadas series de Taylor, llegaron a convertirse en una herramienta básica para el desarrollo del cálculo y la resolución de ecuaciones diferenciales. Taylor, discípulo de Newton, estuvo interesado en el problema del desarrollo de funciones usando otras más sencillas. Era conocido que una función polinómica $f(x)$ de grado n, $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ se puede escribir como $f(a+h) = c_0 + c_1h + \cdots + c_nh^n$ para todo par de números a y h, los coeficientes c_k, $0 \leq k \leq n$ obedecen a la relación $c_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$ con $1 \leq k \leq n$, $c_0 = f(a)$. Taylor usando algunas ideas del *cálculo de diferencias finitas* y, estrechando una generalización de lo anterior, descubrió la conocida *fórmula de Taylor* en los siguientes términos:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2\frac{f''(x)}{2!} + \cdots$$

válida bajo ciertas condiciones sobre la función f, lo planteó desde la *Fórmula de Interpolación de Newton*, resaltada en seguida como $[*_1]$.

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y r un número positivo fijo. Define $\Delta f(x) = f(x+r) - f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\Delta^2 f(x) = \Delta\big(\Delta f(x)\big)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y así sucesivamente. Si la variable *x* pasa del valor *x* al valor $x + nr$, para $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x)$ pasa a valer $f(x+nr)$ y se tiene:

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(x) + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot \cdots n}\Delta^n f(x) \quad [*_1]$$

Los coeficientes de $f(x)$, $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$ se forman de la misma manera que los coeficientes del desarrollo del binomio $(a+b)^n$. Dichos coeficientes son:

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \cdots, \frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot \cdots n},$$

ahora, si *h* es un número dado positivo, tomando *n* y *r* tales que $nr = h$, entonces *r* tiende a cero cuando *n* tiende a infinito y, recíprocamente. Escribe $[*_1]$ de la forma:

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{nr}{1}\frac{\Delta f(x)}{r} + \frac{n(n-1)r^2}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 f(x)}{r^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1 r^n}{1\cdot 2\cdot \cdots n}\frac{\Delta^n f(x)}{r^n}$$

según Taylor, si *r* tiende a cero, *n* tiende a infinito, por tanto,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2\frac{f''(x)}{2!} + \cdots \triangleq.$$

Lo que permite inferir que *su fórmula* se obtuvo a partir de la fórmula de interpolación de Newton, para un número infinitamente grande de pasos y trabajando con números infinitamente grandes e infinitamente pequeños. Desde su descubrimiento, la fórmula de Taylor ha proporcionado un método potente para solucionar distintos problemas del análisis matemático, entre ellos: el cálculo de límites indeterminados, discusión general del problema de máximos y mínimos, desarrollo en serie de funciones trascendentes y procedimientos numéricos de aproximación de tales funciones. En general, la teoría de *polinomios de Taylor* infinitos se puede considerar como parte de la teoría de funciones analíticas, muy importante dentro del análisis matemático desde el siglo XIX.

De su trabajo se resalta que la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $x = x_0$ es aquella recta que pasa por el punto $\left(x_0, f_{(x_0)}\right)$ y tiene como pendiente la primera derivada de la función en el punto. De hecho, la recta tangente es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en un entorno del punto $\left(x_0, f_{(x_0)}\right)$. Si x se encuentra lejos de x_0, la recta tangente puede no ser una buena aproximación. La recta tangente es un polinomio de grado 1, el tipo más sencillo de función que se puede encontrar, por lo que parece natural preguntarse si es posible encontrar un polinomio de grado dos que aproxime esta función. El proceso de derivación de funciones reales de variable real puede obviamente iterarse, obteniendo la segunda derivada y sucesivas derivadas de una función. La existencia de la derivada n-ésima en un punto dará lugar a una aproximación aún mejor, mediante un polinomio de grado menor o igual que *n*, llamado polinomio de Taylor.

Los polinomios de Taylor aproximan mejor a la función localmente, en el entorno de un punto, cuanto mayor sea el orden del polinomio. Sería natural extender la noción de polinomio de Taylor a la de serie de Taylor dejando que n tienda a infinito y preguntarse si, dada una función f de clase infinito, la serie de Taylor converge en todo punto a la función f. Para responder esta pregunta es necesario el teorema que afirma que, si una función es de clase infinito en cierto intervalo y tiene todas sus derivadas uniformemente acotadas para todo punto del intervalo, entonces la función coincide con su serie de Taylor en todo punto del intervalo. Sin embargo, la diferencia entre la función original y su polinomio de Taylor conocida hoy como *resto de Lagrange* o *resto de Taylor*. La *rapidez* con la que el resto de Lagrange tiende a cero al acercarnos al punto en cuestión viene dada por el Teorema de Taylor-Young. En algunos textos suele llamarse Teorema de Taylor con resto infinitesimal o forma infinitesimal del resto de Taylor y afirma que el resto de Taylor de orden n de f en x centrado en a es un infinitésimo de orden superior que la potencia n−ésima de $x = a$ en el punto a, pero este resultado no permite calcular el error que se comete en la aproximación. Una estimación más precisa es posible mediante el conocido Teorema de Taylor, una generalización del Teorema del Valor Medio, pero incluyendo derivadas sucesivas de una función, que es propio del desarrollo alcanzado en las matemáticas modernas. A pesar de ello cabe resaltar que Taylor añadió a las matemáticas una nueva rama que ahora conocemos como *cálculo de diferencias infinitas* y descubrió su célebre fórmula. Cabe resaltar que además de Taylor también Newton, Leibniz, Bernoulli o Moivre descubrieron variantes al Teorema de Taylor. La importancia de este teorema permaneció desconocida hasta 1772, cuando Lagrange expuso los principios básicos del cálculo diferencial.

Como se ha mencionado, la *fórmula de Taylor* también conocida como Teorema de Taylor es uno de los resultados fundamentales del Análisis Matemático moderno y cuenta con un amplio abanico de aplicaciones. Su origen está ligado con problemas de aplicación a la ciencia con problemas de optimización y aproximación de funciones. El teorema es descrito en los siguientes términos: Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos x, a cualesquiera en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto *c* en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$f(x) - T_n(f, a)(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{k!}(x-a)^{n+1}.$$

La demostración es en los siguientes términos: se fijan los puntos x, a. Se define una función $g: I \ \to \mathbb{R}$:

$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \quad \forall\, t \in I$$

fácilmente comprueba que $g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$ Aplicando el teorema del valor medio generaliza a las funciones $g(t)$ y $h(t) = (x-t)^{n+1}$ en el intervalo de extremos x y a, para garantizar que hay un punto *c* comprendido entre *x* y *a* tal que:

$\big(h(x) - h(a)\big)g'(c) = \big(g(x) - g(a)\big)h'(c)$. Como *g(x) = h(x) = 0*, se tiene que:

$$(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = g(a)(n+1)(x-c)^n$$

y, teniendo en cuenta que $g(a) = f(x) - T_n(f,a)(x)$, obtiene la igualdad. En términos formales matemáticamente, la serie de Taylor tiene la siguiente forma:

$$T = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$T(f,a,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \triangleq.$$

En general, la diferencia entre serie y polinomio de Taylor es que, en el primer caso, se trata de una secuencia infinita, mientras que en el segundo se trata de una serie finita. Así, el polinomio de Taylor se puede definir como una aproximación polinómica de una función *n* veces derivable en un punto específico (*a*).

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0) + \cdots + f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n$$

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \quad \triangleq.$$

El *Treatise* de Maclaurin de 1742 fue fundamental en la recepción del legado de Newton, su estilo era una síntesis de lo antiguo y lo moderno. Motivado por la polémica que surgió tras la aparición del *Analyst* de Berkeley en 1734; Maclaurin presentó una exposición sistemática con una variedad de resultados, con contribuciones originales tanto en matemáticas puras como aplicadas. Pero además de refutar las críticas de Berkeley, y de imprimir sus resultados en matemáticas, también se destaca el proyecto de unificar las diferentes corrientes del complejo legado newtoniano. Maclaurin, mientras valora el poder de los métodos modernos comparados con los antiguos, subraya que los matemáticos antiguos eran más rigurosos; muestra que el método de fluxiones se sigue naturalmente de la geometría griega, desde el método de exhausción, hasta una técnica para el cálculo de áreas y volúmenes atribuida a Eudoxo y Arquímedes. Para el método de los infinitesimales manifiesta que representan un alejamiento del rigor de la geometría antigua. La oposición de Maclaurin al método de los infinitesimales, manifiesta que los geómetras que se han envuelto en el laberinto del infinito, han abandonado la fiel práctica de los antiguos y han aceptado la divisibilidad infinita de la materia y la teoría vorticial de los movimientos planetarios. Indica que los infinitos y los infinitesimales pasaron de la geometría a la filosofía, llevando consigo la oscuridad y perplejidad que no puede dejar de acompañarlos.

> Algunos admiten una división real, así como una divisibilidad de la materia in infinitum. Se imaginan que los fluidos consisten de partículas infinitamente pequeñas, que están compuestas a la vez de otras infinitamente menores; y se supone que esta subdivisión continúa sin fin. Para resolver los fenómenos de la naturaleza, propone vórtices de grados indefinidos o infinitos, imitando los infinitesimales de la geometría; todo ello cuando cualquier orden más elevado es insuficiente para tal propósito, o cuando se ocupan de una dificultad insuperable, un orden inferior puede preservar tan favorito esquema. La naturaleza está confinada en su operación a actuar por pasos infinitamente pequeños.

> Se rechazan los cuerpos perfectamente duros, y la antigua doctrina de los átomos es tratada de imaginaria porque en sus acciones y colisiones pueden pasar súbitamente del movimiento al reposo, o de éste a aquél, violando esta regla. De esta manera la doctrina de los infinitos está entretejida de nuestras especulaciones sobre la geometría y la naturaleza (MACLAURIN, 1801, p .84).

Este apartado muestra cuanto estaban enmarañadas las matemáticas con la filosofía natural en el pensamiento de Maclaurin. El método de los indivisibles e infinitesimales, poco riguroso, se convirtió en falsas creencias sobre la estructura de la materia y el éter, conllevó al rechazo del atomismo y a la aceptación de las teorías vorticiales. Indicó que se trataba de una filosofía absurda por el producto de una geometría viciada. Leibniz y algunos de sus seguidores como Bernard le Bovier de Fontenelle fueron claramente su objeto controvertible, así como Berkeley. Se preguntó ¿Cómo pues es posible vincular el método de exhausción de Arquímedes con el método de fluxiones, evitando el inseguro concepto de infinitesimal?, intenta responder con una clara y precisa exposición:

> Nuestro designio en el siguiente tratado no es proponer alterar la noción de fluxión de Sir Isaac Newton, sino explicar y demostrar su método deduciéndolo ampliamente a partir de pocas verdades auto evidentes, en esa estricta forma. Y al tratarla, abstraer de todos los principios y postulados que puedan requerir imaginar cualesquiera otras cantidades, salvo aquellas que pueda concebirse que tienen existencia real. No consideraremos ninguna parte del espacio o el tiempo como indivisible o infinitamente pequeño, sino que consideraremos un punto como un término o límite de una línea, y un momento como un término o límite del tiempo.

> Tampoco resolveremos las líneas curvas o los espacios curvilíneos por elementos rectilíneos de cualquier clase. El método de demostración, que fue inventado por el autor de las fluxiones, es preciso y elegante; pero proponemos empezar con uno que es un poco diferente el cual, al ser extraído un poco del de los antiguos, puede hacer más fácil a los aprendices la transición a su método y puede obviar algunas objeciones que se le han hecho (MACLAURIN, 1801, p. 96).

Maclaurin se refiere claramente al método de las razones primeras y últimas, es decir, al método sintético de fluxiones. Su objetivo es presentar este método de una forma que naturalmente se relacione con el método de exhaución de Arquímedes. Primero presenta las nociones de movimiento, espacio y velocidad; luego procede a introducir nociones básicas de la geometría fluxional de Newton. Define la fluxión como la velocidad con la cual una cantidad fluye, en cualquier límite del tiempo mientras se supone que se genera. Esta apelación intuitiva le proporciona al método sintético de fluxiones de Newton una base ontológica ausente en el cálculo diferencial de Leibniz, dado que los infinitesimales, aquí Maclaurin está de acuerdo con Berkeley, no tienen *una existencia real*. Luego presenta cuatro axiomas, dos sobre movimiento acelerado, y dos sobre movimiento retardado, que le permiten basar los procedimientos límite de Newton en una estructura axiomática análoga a la de las técnicas de exhaución. Todas las pruebas en el primer libro del *Treatise* de Maclaurin se asemejan estructuralmente a las técnicas de exhaución en cuanto prueban la imposibilidad de una desigualdad entre dos magnitudes geométricas. Como lo señala Grabiner, sólo en el segundo libro *la geometría de las fluxiones* se abandona a favor de los cómputos del método de fluxiones. Aquí Maclaurin introduce la notación y el algoritmo del *De quadratura* de

Newton permitiéndole hacer cómputos de fluxiones que interpreta en términos de magnitudes cinemáticas.

La convicción de que el algoritmo es independiente de la geometría era ajena a Maclaurin; también era la idea que las matemáticas podrían desarrollarse independientemente de la filosofía natural; para él, las matemáticas y la filosofía natural estaban extremadamente entrelazadas. El *Treatise* fue una síntesis de líneas de investigación en los trabajos matemáticos impresos de Newton y en los trabajos de sus primeros seguidores: esta obra empezaba con un Prefacio que le rendía tributo a la geometría griega; en el Libro 1 el método de exhausción resultó ser la base del método geométrico de las razones primeras y últimas presentado en los *Principia*. El método analítico de fluxiones se desarrolló sólo después de que estas premisas se habían clarificado; los tratamientos de la información del Libro 2, que continuaban la tradición simbólica newtoniana, eran presentados no como un algoritmo independiente, sino como un simbolismo que siempre era posible interpretarse en términos de nociones geométrico/cinemáticas.

El tratado de fluxiones de Maclaurin publicado en 1742, marcó la cima de la precisión lógica alcanzada por las matemáticas en Inglaterra durante el siglo XVIII. La muerte de Maclaurin en 1746, y después la de Johann Bernoulli en 1748, imprimen la desaparición de los últimos discípulos de Newton y Leibniz. La próxima época estará dominada por Johann Bernoulli, Euler, y D´Alamber. Johann Bernoulli[52] estando en Paris, conoció personajes como Malebranche, Cassini, La Hire, Varignon y L’Hôpital. Tras la muerte de su hermano Jakob en 1705, Johann le sucede en su cátedra en Basilea; el entusiasmo manifestado en su enseñanza atrae a un alumno que resultaría extraordinario, un joven de nombre Leonard Euler. Aquí es de resaltar que, aunque Jakob poseía un sentido crítico

[52] Johann Bernoulli (1667-1748), decimo hijo de la familia de Nikolaus Bernoulli. Johann motivado por su hermano mayor Jokob decide dedicarse a la física, la astronomía y a las matemáticas.

más desarrollado que Johann, este último manifestó mayor originalidad e imaginación, llegando a ser más prolifero que su hermano mayor en matemáticas. Johann reconoció siempre a Leibniz como su maestro y fiel amigo, manifestó con respecto a Newton una antipatía incondicional, objetándole de manera imperdonable con relación a la célebre controversia entre Newton y Leibniz. Situación que hizo a los dos hermanos distanciarse con motivo de la solución del problema de los isoperímetros.

Con relación al problema isoperimétrico, este era clásico desde la antigüedad, fueron numerosos matemáticos que se ocuparon de este problema sin hallar posible repuesta hasta la época. Desde Zenodoro que lo resolvió para polígonos, y vivió cerca al 200 a.C., hasta el siglo XIX cuando se planteó la resolución para figuras convexas cualesquiera e incluso la necesidad de probar la existencia de tal solución. La literatura en Educación Matemática muestra profusos trabajos que hacen un recorrido histórico del problema, entre ellos: Blåsjö (2005), Porter (1993) y Thomson (1984); lo interesante es que en mayo de 2010 le dedicaron en Túnez un congreso con el título *International Conference on the Isoperimetric Problem of Queen Dido and its Mathematical Ramifications* (ASHBAUGH *et al*., 2010). El mencionado problema se puede resumir así: Entre todas las curvas cerradas en el plano de perímetro fijo, ¿qué curva (si la hay) maximiza el área de la región que encierra? Se puede demostrar que esta cuestión es equivalente al problema: Entre todas las curvas cerradas en el plano que cierra un área fija, ¿qué curva (si la hay) minimiza el perímetro? Se destaca que este problema está relacionado conceptualmente con el principio de mínima acción en física, que consiste en: ¿cuál es el principio de acción que encierra la mayor área, con la mayor economía de esfuerzo? Trabajo adelantado por Cusa[53], manifestado en el proceso por el que se genera un círculo, como el reflejo más directo, en el

[53]Nicolas de Cusa, filosofo del siglo XV consideró la acción rotatoria.

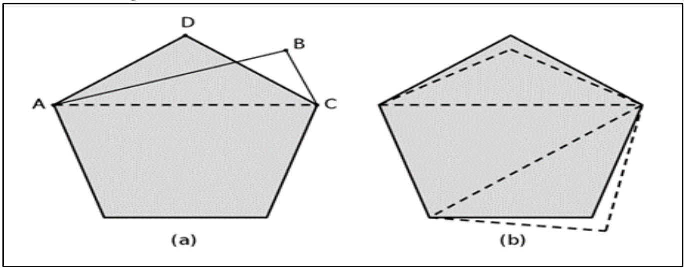
dominio de las impresiones sensoriales, del proceso por el que se crea el universo. Recordemos que Kepler invocó el principio isoperimétrico al discutir la morfología del sistema solar en su obra *El misterio sagrado del Cosmos* (*Mysterium Cosmographicum* en1596). Es de destacar que para el siglo XVIII Lagrange y Euler realizaron grandes contribuciones para la resolución de problemas de isoperímetro similares. Problemas que habían sido un asunto de discusión durante más de medio siglo, mediante una nueva técnica denominada: el *cálculo de variaciones (*BOYER, 2010, p. 615). Sin embargo, no abordaron la demostración del problema concreto de la curva de una longitud dada capaz de abarcar una mayor área.

Aunque el círculo parece ser la solución obvia al problema, probar este hecho es bastante difícil aún en la actualidad. El primer adelanto en la solución lo hizo Steiner[54] en 1838, usando un método geométrico llamado *simetrización de Steiner*. Introdujo el enunciado anterior diciendo que se trata de «un problema que Pappus nos transmite desde la antigüedad». Ofreció una solución dada por dos triángulos isósceles en los que, si se toma en cada triángulo los puntos de intersección de las perpendiculares a los lados en los puntos de unión de estos con las bases, entonces los segmentos determinados por los puntos de intersección y los extremos de las bases son de igual longitud en los dos triángulos. Steiner planteó que la razón entre las bases es igual a la razón entre los senos de los ángulos que los lados forman con cada base. En primer lugar, si el polígono tiene área máxima, debe tener todos sus lados iguales. En efecto, si dos lados AB y BC fueran distintos, entonces se tiene un triángulo ABC no isósceles, de modo que tomando como base el segmento AC es posible construir un triángulo isósceles ADC, isoperímetro al primero, pero que según la propiedad (entre los triángulos con el mismo perímetro e idéntica base, el isósceles es el

[54] Jakob Steiner geómetra suizo

que tiene mayor área), tendría mayor área, con lo que el polígono de partida no sería de área máxima (ver Figura 31a).

Figura 31 - Simetrización de Steiner



Fuente: Elaboración propia.

En segundo lugar, si el polígono tiene área máxima, debe ser equiangular. Si dos ángulos son distintos, es suficiente aplicar que dados dos triángulos isósceles no semejantes, si se construyen, sobre las mismas bases, dos triángulos isósceles semejantes entre sí, de modo que la suma de sus perímetros coincide con la suma de los perímetros de los triángulos originales no semejantes, entonces la suma de las áreas de los triángulos semejantes es mayor que la suma de las áreas de los triángulos no semejantes; para construir dos triángulos semejantes que, conservan el perímetro, aumentan el área, en contra de la maximalidad del polígono de partida (Figura 31b).

Steiner mostró que, si existía una solución, entonces tenía que ser el círculo. Comenzó con algunas construcciones geométricas fáciles de entender; por ejemplo, demostró que cualquier curva cerrada que encierra una región que no es completamente convexa puede ser modificada para encerrar un área mayor "rotando" las áreas cóncavas para que se vuelvan convexas. Demostró que cualquier curva cerrada que no sea completamente simétrica puede ser deformada para encerrar un área mayor, dado que la única forma que es perfectamente convexa y simétrica es el círculo. Aunque esto, en sí mismo, no representa una prueba rigurosa del teorema isoperimétrico, que se suele enunciar en forma de desigualdad que relaciona el perímetro y el área de una curva cerrada en el plano. Si P es el perímetro de la curva y A es el área de la región cerrada por la curva, entonces la desigualdad establece que para el caso de un círculo de radio r, se tiene $A = \pi r^2$ y $P = 2\pi r$, e introduce estos valores en la desigualdad para mostrar que el círculo maximiza de hecho el área entre todas las curvas de perímetro fijo. Pues, el círculo es la única curva que maximiza el área. En la actualidad hay muchas pruebas de esta desigualdad. Aquí se resalta la de Adolf Hurwitz en 1901, dado que se trata de una prueba puramente analítica de la desigualdad isoperimétrica clásica basada en las series de Fourier y en el teorema de Green. El lector interesado puede consultar la bibliografía reportada al final de este manuscrito. El esquema básico de las demostraciones de Steiner es similar en todas ellas, aunque con argumentos y construcciones diferentes. A saber, si partimos de una figura no circular con perímetro fijo y área máxima, se puede construir otra figura que, con el mismo perímetro, tiene mayor área, en contradicción con lo supuesto, concluyendo que la figura óptima debe ser un círculo ya que las nuevas figuras presentan propiedades que solo tiene este.

CAPÍTULO 4

Desarrollo del Cálculo en el Siglo XVIII

DESARROLLO DEL CÁLCULO EN EL SIGLO XVIII

Cabe resaltar que los grandes cambios generados entre los siglos XV al XVII con la “nueva” forma de hacer matemáticas, generó cambios de actitud en las matemáticas del siglo XVII quizá influenciada por la variedad de descubrimientos de tipo: geográfico, científico, médico y tecnológico; pero fue el interés de los matemáticos por descubrir más que por dar pruebas rigurosas lo que fortaleció dicho cambio. Implícitamente se potenció el uso del infinito sin las limitaciones aristotélicas. Situación que para el siglo XVIII proporcionó a las matemáticas dos grandes instrumentos formalizados: la geometría analítica y el cálculo infinitesimal. Ambos extensamente desarrollados y aplicados a la resolución de una enorme variedad de problemas. Lo que hizo aumentar considerablemente el número de aplicaciones del cálculo, pero con un uso impreciso de cantidades infinitas e infinitesimales, así como la intuición geométrica; ambos seguían causando confusión y duda sobre sus fundamentos. De hecho, la noción de límite, central en el estudio del cálculo, era aún vaga e imprecisa en ese entonces. Se inicia el siglo XVIII que luego fue conocido como el siglo de la razón, porque durante este período se observó el desarrollo de unas bases sólidas para ese cálculo que venía sin rigor. Uno de los principales artífices fue el *Análisis de Fourier*, muy similar al planteado por Taylor, con la diferencia que Fourier planteó la aproximación de una función por combinaciones lineales de funciones del tipo seno y coseno. Trabajo que motivó el estudio de la representabilidad de una función arbitraria por medio de una serie trigonométrica estudiada a finales del siglo y que se mantuvo hasta inicios del siglo XIX, también mostrados más adelante y que complementarían el rigor ausente en los siglos predecesores.

EL ANÁLISIS DE FOURIER

Fourier[55] investigó en matemáticas puras y aplicadas, lo que produjo un impulso para el trabajo posterior sobre series trigonométricas y la teoría de funciones de variable real. Con los aportes de Fourier el concepto de función tomó protagonismo, relacionó el problema de representación en series con el problema de integración, hecho que trasformó radicalmente el cálculo infinitesimal. Inició estudiando la trasformación del calor, lo que le permitió ampliar el dominio de las funciones más allá de las continuas. Trabajo que posteriormente motivó a otros matemáticos a profundizar en las condiciones que debía cumplir una función para ser representada en series trigonométricas. Una de esas condiciones era la integrabilidad de la función sobre un intervalo determinado incorporando el concepto de integral. Para esta época la integral era considerada como una herramienta de solución necesaria, pero no era el concepto principal de estudio. Fourier aportó la notación de los extremos de integración que, en matemáticas modernas es,

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)$$

lo que le permitió identificar que el problema principal consistía en el desarrollo asintótico de la función $\int_a^x f(t)dt$, (esto es, $\int_a^x f(t)dt = x^n + k$), considerado una variante de la integración impropia. Lo destacado aquí es conforme al planteamiento sobre la buena definición que debe tener la función, situación que la relaciona

[55] Jean Baptiste Fourier (1768- 1830), matemático francés, realizó investigaciones en matemáticas puras y aplicadas.

con las integrales impropias de segunda especie (MATEUS-NIEVES; HERNÁNDEZ, 2022). Por su parte, Pier (1996) plantea que con Fourier la integral se ve como el área bajo la curva, planteando la pregunta "¿qué tan discontinua puede ser una función para que sea integrable?" (p. 66); sin embargo, la formalización de la integral impropia fue trabajada por DeMorgan en 1830 con series convergentes que representan la integral $\int x \propto e - x dx + \infty u$ para $u>0$ arbitrario. Pier (1996, p. 70-72) plantea que "Poisson abordó la resolución de una integral impropia mediante extensión al plano complejo, considerando: $dx = -i(\cos z + i\ senz)dz$, deduciendo que:

$$\int \frac{dx}{x} = \left[log\left(-(\cos z + i\ sen\ z)\right)\right]_0^{(2n+1)\pi}\text{''}.$$

Ahora bien, es necesario afinar la lupa de la historia que permite ubicar el origen del análisis de Fourier (1822) a mediados del siglo XVIII, con los trabajos de D'Alembert, Euler; Bernoulli, cuando estudiaron el movimiento de una cuerda vibrante. D'Alembert demostró que si la función $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical de la cuerda en la coordenada *x* (supone $0 \leq x \leq \pi$ por simplicidad) y en el tiempo *t*, lo que en términos modernos equivale a:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ \ 0 < x < \pi,\ \ t > 0.$$

Esta ecuación (conocida como *la ecuación de ondas*) tiene infinitas soluciones, la idea era obtener la que cumpla unas condiciones iniciales y de contorno predeterminadas. Así, si la posición inicial de la cuerda estuvo dada por una función f, donde la velocidad inicial de la misma es cero, y la cuerda está fija en sus extremos, la función u satisface un problema de tipo mixto de la forma:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

D'Alembert y Euler publicaron independientemente soluciones al problema anterior de la forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{f}\,(x+t) + \widetilde{f}\,(x-t)\right]$$

siendo $\widetilde{f}$ la extensión a $\mathbb{R}$, impar y 2π periódica de la función f. De este resultado Euler discrepa de D'Alembert en el tipo de funciones iniciales f que podían ser consideradas. Mientras que para D'Alembert f debería tener una única expresión analítica, Euler defendía que no había razón física para no admitir como posiciones iniciales f a aquellas funciones que, en diferentes partes de $[0,\ \pi]$, tuviesen expresiones distintas siempre que la posición resultante, al considerarlas unidas, tuviese una cierta regularidad. Hay que tener en cuenta que, para los matemáticos contemporáneos de Euler era admitido que cada función daba lugar a una gráfica, pero no recíprocamente, cuando la gráfica en cuestión tenía diferentes expresiones en distintos intervalos. Estas discrepancias fueron las primeras manifestaciones sobre los problemas que acarreaba la necesidad de tener una buena definición de la noción de función. Lo que aquí se resalta es que Euler defendía que cualquier gráfica podía ser considerada como una curva inicial, hecho que no era compartido por D'Alembert.

Otra forma de abordar el problema fue propuesta por Daniel Bernoulli en 1753, apoyado en situaciones de tipo físico, que lo llevaron a pensar que una cuerda oscila con varias frecuencias al mismo tiempo cuando esta esta tensada y es pulsada por alguien o algo, determinó que las amplitudes relativas dependen de las condiciones iniciales de la vibración. Característica conocida hoy como principio de superposición. La solución propuesta consistió en una serie trigonométrica de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sen\,(nx)\cos(nt), \;\; \forall\, n \in \; \mathbb{N}$$

con una adecuada elección de los coeficientes f_n.

Sin embargo, esta versión expuesta por Bernoulli no tuvo aceptación en su tiempo. En particular, Euler objetó la idea de Bernoulli porque consideró llevaba a un resultado paradójico, el hecho de que una función arbitraria pueda ser expresada en forma trigonométrica. En su tiempo, las curvas se dividían en dos clases: continuas y geométricas. Una curva se decía continua si ordenadas y abscisas podían conectarse por alguna fórmula $y = f(x)$. Y una curva se denominaba geométrica si podía dibujarse con trazos continuos o discontinuos. Pensaban, pues, que la segunda categoría era más amplia que la primera, ya que, lo que hoy consideramos como una función C_1 a trozos puede dibujarse, pero, no expresarse necesariamente con una sola expresión analítica. Luego, si una función arbitraria puede expresarse, por ejemplo, como serie de senos, entonces cualquier curva geométrica sería continua, lo que no era admisible por entonces. Por otra parte, D'Alembert consideraba que la manera más natural de hacer que una cuerda empezase a vibrar era desplazarla de su posición de equilibrio tirando de algún punto de ella. Esto hace que su posición inicial se pueda representar mediante dos rectas que forman un determinado ángulo. Para D'Alembert, esto haría imposible pensar que pudiese expresarse como una serie trigonométrica debido a la no derivabilidad de tal función.

A pesar de estos planteamientos, Fourier, cincuenta y cuatro años más tarde, con el problema de la propagación del calor, examinó con detalle las ideas de Daniel Bernoulli. Se interesó por la teoría de la conducción del calor en los cuerpos sólidos. Consideró una varilla delgada de longitud dada cuyos extremos se mantienen a 0º centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la función $f(x)$ representa la distribución inicial de la temperatura en la varilla, supone que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante, se pregunta cuál será la temperatura de cualquier punto x en el instante $t > 0$. Fourier demostró que si $u(x,t)$ representa la temperatura en la sección x y en el tiempo t, entonces la función u debe satisfacer

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < T$$

$$u(x,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \le x \le \pi.$$

Siguiendo el razonamiento de Bernoulli, Fourier buscó soluciones más sencillas que puede presentar la ecuación del calor sujetas a las condiciones de contorno. Usó, para ello, el método de separación de variables y garantizó que la solución del problema venía dada como superposición de tales soluciones. Sucintamente, formuló como solución la función *u* definida por la serie:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \exp(-n^2 t)\, sen(nx)$$

donde,

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx \ \ \forall\, n \in \ \mathbb{N}.$$

En la demostración de Fourier se ve el uso y desarrollo planteados por Taylor de la función $f(x)$ y de las funciones trigonométricas $sen\,(nx),\ \ n \in \mathbb{N}$. Inicialmente impuso que la función $f(x)$ admite un desarrollo en serie de potencias, para luego, mediante complicados procedimientos y mucho ingenio, pasar a funciones $f(x)$ generales y arbitrarias. Aquí sin duda, la expresión def_n se convirtió en una de las contribuciones fundamentales de Fourier y marcó una diferencia notable respecto del trabajo de Bernoulli. Con esta primera demostración de que cualquier función admite una representación en serie trigonométrica da nombre a una disciplina importante en la Matemática actual: *el Análisis de Fourier*. En su obra Fourier comienza deduciendo la ecuación que gobierna la difusión del calor. Después resuelve el problema de la distribución de temperatura en un tiempo dado a partir de la distribución en el instante inicial. Para ello introduce el método de separación de variables, también conocido como método de Fourier. Para escribir la solución necesita escribir la función que da el dato inicial como suma de una serie trigonométrica.

Hubo otra contribución considerada como importante a la teoría de las series de Fourier cuando Dirichlet estableció condiciones iniciales, que posteriormente Riemann en 1854 desarrollaría sobre series trigonométricas. En ese trabajo Riemann construyó funciones con una cantidad infinita de discontinuidades y estudió la posibilidad de representarlas por series de Fourier. Es clave mencionar que durante el resto del siglo XIX se obtuvieron condiciones todavía más generales para la convergencia de series de Fourier. Algunos son citados a lo largo del trabajo y se ahora se hará énfasis sobre el criterio de Dini. Para el caso general y dada una función de período 2π el problema consiste en encontrar una serie trigonométrica cuya suma coincida con $f(x)$ para cada x. El criterio de Dini sostiene que si $f(x+c) = \frac{f(x)}{c}$ es integrable en un entorno a cero en la variable c, entonces la serie de Fourier de f converge puntualmente a $f(x)$. La importancia de este trabajo se observó posteriormente con el espacio $L_2(a,b)$ en el sentido de Lebesgue (1901), planteada en los siguientes términos: Sea $[a,b]$ el intervalo cerrado de extremos a y b, con a y b dos números reales dados. Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es una función medible, diremos que f es de cuadrado integrable si la integral:

$$\int_a^b |f(x)|^2 \ dx$$

existe en el sentido de Lebesgue y es finita. Para ello, Dados f, g dos elementos de $L_2(a,b)$ se consideran iguales si lo son casi por doquier en $[a,b]$ (es decir, *f(x) = g(x)* salvo en un subconjunto de [a; b] de medida nula). Esto es:

$$L_2(a,b) = \left\{ f:[a,b] \to \mathbb{R} \ medible: \ \int_a^b f^2(x)dx \ < +\infty \right\}$$

y si $f, g \in \ L_2(a,b), f = g \leftrightarrow f(x) = g(x)$ c.p.d. en $[a,b]$.

Así $L_2(a,b)$ es un espacio vectorial real con la suma usual de funciones y el producto usual de un número real por una función. Si f y g son dos elementos de $L_2(a,b)$ se puede definir el producto escalar de f y g como:

$$< f,g > = \int_a^b f(x)g(x)dx \ \ \forall f,g \ \in \ L^2(a,b) \ \triangleq,$$

lo interesante de este resultado es que en matemática modernas sabemos que, con este producto escalar, $L^2(a,b)$ es un *espacio de Hilbert*[56] *separable* de dimensión infinita. Mire la extrapolación tan importante a los avances planteados por Fourier con resultados como la definición de base, al modo hilbertiano, en $L^2(a,b)$, y el *teorema de Lebesgue* en 1902. veámosla al detalle.

---

[56] Matemático de finales del siglo XIX e inicios del siglo XX. En este libro se mencionarán sus principales aportes.

Definición de base hilbertiana en $L^2(a,b)$: Sea $B = \{f_{n,} n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Diremos que $L_2(a,b)$ es hilbertiana de $L^2(a,b)$ sí y solo si cualquier elemento f de $L^2(a,b)$ se expresa de la forma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle \ f_n$$

esto es,

$$\lim_{k \to \infty} \left[f \ \sum_{n=1}^{k} \langle f, f_n \rangle \right] = 0$$

en $L^2(a,b) \ \triangleq$,

En varias ocasiones, disponer de criterios equivalentes para demostrar que ciertos subconjuntos ortonormales son base de $L^2(a,b)$, puede llegar a ser útil.

LA OBRA EULER

Dentro del desarrollo del cálculo infinitesimal se encuentra otro trabajo que se destaca como extraordinario, tanto por su sorprendente profundidad como por sus importantes hallazgos. Se habla aquí del trabajo de Leonhard Euler que llegó a convertirse en figura principal de las matemáticas en el siglo XVIII. Se destacan tres tratados escritos en latín, *Introductio in analys infinnitorum* de 1748, *Institutiones calculi dierentiales* de 1755 e *Institutiones* *calculi integralis* en 1768. En los que Euler dio al cálculo la forma que conservó hasta el primer tercio del siglo XIX. El cálculo, que inicialmente era un cálculo de variables o, más exactamente, de cantidades geométricas variables, y de ecuaciones, se fue transformando, por su influencia, en un cálculo de funciones.

La historiografía realizada permite inferir que la introducción formal del Cálculo Integral dentro del análisis infinitesimal, se logró con el estudio de Johan Bernoulli, con el primer curso sistemático de cálculo integral en 1742. Sin embargo, fue Euler quien llevó la integración hasta sus últimos efectos, de tal forma que los métodos de integración indefinida alcanzaron prácticamente su nivel actual. Sin embargo, se aclara que en la teoría de fluxiones de Newton la mutua inversibilidad de los problemas del cálculo de fluxiones y fluentes se evidenciaba claramente. Mientras que para Leibniz el problema era más complejo: la integral surgía inicialmente como definida. No obstante, la integración se reducía prácticamente a la búsqueda de funciones primitivas, a pesar que la idea de la integración indefinida fue inicialmente la dominante. En el desarrollo de este trabajo, los hermanos Bernoulli inventaron el cálculo de variaciones y Monge la geometría descriptiva.

Con los aportes de Euler se revolucionó la matemática continental del siglo XVIII al ubicar una dirección que estaba enfrentada con los valores promovidos por Newton y reglamentados por Maclaurin. Este proceso cambió el lenguaje, las principales líneas de investigación, y los valores subyacentes a la práctica matemática continental. A pesar de su magnitud, este cambio es difícil de discernir ya que tiene que ver con aspectos técnicos de matemáticas superiores y se dio en ausencia de declaraciones o manifiestos explícitos. Fue un cambio silencioso, y sin embargo significativo. El cambio insurrecto en las matemáticas continentales puede resumirse brevemente recordando los desarrollos que han sido estudiados por especialistas como Blay, Bos, Engelsman, Youskevitch, Fraser, y Grattan-Guinness. Por su parte Fraser (1989), caracterizó el análisis del siglo XVIII, desde el cambio ocurrido alrededor de 1740 en los siguientes términos:

> La imagen que ahora surge del desarrollo del cálculo en el continente, podría dividir el desarrollo de investigación sobre el tema en tres amplios períodos: uno geométrico, en el que predominan los problemas y las concepciones de la geometría; uno analítico o "algebraico" que comienza en la década de 1740 en los escritos de Leonhard Euler y alcanza su expresión final con el trabajo de Joseph Louis Lagrange a finales de siglo; y el período del análisis clásico que comienza a principios del siglo XIX con los escritos de Augustin Louis Cauchy (FRASER, 1989. p. 320).

Al respecto Guicciardini (2006) plantea que sólo algunos matemáticos participaron en el cambio desde el primer período, el geométrico, al segundo, el algebraico, y que el intercambio de información entre ellos, por medios como los manuscritos y presentaciones verbales, era inaccesible para las personas ajenas. Cabe aclarar que los matemáticos británicos no siguieron los trabajos de Euler y Lagrange, dado que raramente son citados en la literatura británica hasta principios del siglo XIX. Retomando a Fraser (1989), alrededor de 1740 los matemáticos continentales, iniciando con Leonhard Euler, empezaron a concebir el cálculo no tanto como un algoritmo para el estudio de las curvas u otros objetos geométricos, como había sido el caso para las obras de Leibniz y Newton, sino más bien como el estudio de las funciones entendidas como expresiones analíticas compuestas de variables y constantes. Este giro, constituye lo que Bos (2001) llamó la "des-geometrización" del análisis del siglo XVIII, cuyos objetos ahora eran expresiones simbólicas, a saber, funciones. Además, las funciones podrían ser funciones multivariadas, es decir expresiones simbólicas de la forma $f(x, y, z \dots)$. El interés en las funciones multivariadas, fue motivado por el estudio de las *trayectorias ortogonales* (ENGELSMAN, 1984) y la mecánica del continuo (CLIFFORD, 1960), condujo a las ecuaciones diferenciales parciales; siendo D'Alembert, Daniel Bernoulli y Euler los primeros en manejar, alrededor de 1750, una ecuación diferencial parcial en su estudio de la cuerda vibrante[57]. Finalmente, los enfoques hacia la dinámica analítica en términos de principios extremos, tales como "los de mínima acción o de velocidades virtuales, soportaron el desarrollo del cálculo de variaciones, con Euler como el primero en desarrollar este método" (Fraser, 1991, p. 315). Este proceso de des-geometrización del cálculo leibniziano realizado por Euler le otorga el nombre de *cálculo euleriano* para distinguirlo del leibniziano.

Retomando a Euler, en 1748 publica la *Introductio in analysin infinitorum* seis años después del *Treatise* de Maclaurin, su forma y alcance fueron completamente diferentes; Bos (2001) lo describe como des-geometrización. Su primer volumen estuvo dedicado a definir, clasificar, y manipular *funciones* de una o más variables, definidas como expresiones simbólicas que implican cantidades variables y constantes. Este enfoque no se encontró ni en Newton ni en Leibniz. Se trató de una contribución única, lo que significó otra ruptura epistemológica, que debe acreditársele a la generación de Euler, que dividió las funciones en clases: racional, irracional, logarítmica, exponencial, trigonométrica, par, impar, y así sucesivamente. Dedicó páginas enteras a teoremas relacionados con clases de funciones, su transformación, o sus series de expansión, donde ocasionalmente apeló a la intuición geométrica o cinemática. En el segundo volumen, distinguió técnicas algorítmicas aplicadas a

[57] Guicciardini (2006) plantea que el descubrimiento del *cálculo parcial diferencial* fue un logro de varios matemáticos continentales. L. Greenberg ha subrayado la importancia para este desarrollo del matemático francés Alexis Fontaine des Bertins (Ver GREENBERG, J. L. "Alexis Fontaine's Integration of Ordinary Differential Equations and the Origins of the Calculus of Several Variables". *Annals of Science,* n. 39, 1982, p. 1-36).

temas geométricos donde estudió cúbicas, cuadráticas, asíntotas, curvaturas y superficies. Las características geométricas no fueron el fundamento que justificó el riguroso simbolismo del cálculo, como lo fue en Maclaurin, sino como una aplicación de técnicas algorítmicas que se desarrollaron independientemente de cualquier interpretación[58]. En el cálculo euleriano las técnicas algorítmicas se relacionan con *clases* de funciones. Situación que le permitió desarrollar trabajos adelantados sobre cálculo diferencial e integral definidos en su obra *Introductio.* En *Institutiones calculi differentialis* de 1755 y en las *Institutiones calculi integralis* entre 1768-70, presentó asimiló clases de funciones simples y multivariadas como expresiones simbólicas, cuyo propósito fue determinar sus derivadas e integrales. Luego de alcanzar estos resultados simbólicos, buscó extenderlos a geometría y mecánica.

Veamos de forma exhaustiva la ingeniosa forma como Euler en 1744 enfrentó el problema para calcular la suma de la serie:

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n} \qquad [1]$$

para $n \geq 2$ entero, a pesar que esta misma situación estaba siendo trabajada por otros matemáticos del siglo XVII como los hermanos Jacob y Daniel Bernoulli, así como Christian Goldbach, quienes obtuvieron resultados preliminares sobre la suma de esta serie para el caso $n = 2$,

[58] En este sentido Guicciardini (2006) los plantea como un tema delicado, ya que podría alegarse que Euler nunca abandonó por completo la necesidad de una interpretación geométrica. De hecho, Euler le prestó atención a la dimensión geométrica de los diferenciales, entendidos como líneas, ángulos, superficies etc., infinitesimales en lugar de símbolos algebraicos.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,, \qquad [2]$$

Euler perfeccionó y superó los cálculos de sus predecesores. Calcular la suma de la serie [2] no fue fácil debido a su lenta convergencia, dado que para calcular el número al que converge, con una precisión de seis decimales, hay que sumar al menos un millón de términos de la serie, situación algo compleja para la época. Sin embargo, lo enfrentó escribiendo:

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}<\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

suma desde $k=n+1$, por la propiedad telescópica de los extremos de la desigualdad anterior, obtuvo:

$$\frac{1}{n+1}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{n}$$

de tal forma que aproximar la serie con n lugares decimales requiere calcular la suma de al menos 10^n términos. Finalmente, en1735, Euler anunció en [1] que:

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \qquad [3]$$

resultado que contribuyó a establecer su prestigio como matemático. Poco después, anunció la generalización del cálculo anterior al caso cuando $n = 2^m$ en [1]. Diez años después, debido a críticas y dudas, revisó y dio otras demostraciones de los cálculos anteriores, hasta lograr procedimientos satisfactorios del tema. En medio de este trabajo consideró la función gamma que hoy lleva su nombre, y que se obtiene al interpolar la factorial de un entero, y a la consideración de productos infinitos en su relación con ciertas series infinitas. En el apartado [2] estudió varias series, donde consideró una sugerencia, vía correspondencia con Goldbach, y obtuvo una descomposición de la serie [1] en términos de un producto que involucra a todos los primos, probando el teorema: Si de la serie de primos se forma el producto $\frac{2^n}{(2^n-1)} \cdot \frac{3^n}{(3^n-1)} \cdot \frac{5^n}{(5^n-1)} \cdot \frac{7^n}{(7^n-1)} \cdot \cdots$ entonces su valor es igual a la suma de la serie:

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

equivalente a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \prod_{p \ \ primo} \frac{p^n}{p^n - 1}$$

tanto la argumentación como la demostración en sí, se considera como ingeniosa, aquí se hace necesario revisarla para mirar su rigurosidad. Para comenzar, escribe,

$$x = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots$$

luego divide entre 2^n y obtiene:

$$\frac{1}{2^n}x = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \cdots$$

resta de la expresión anterior,

$$\frac{2^n}{(2^n - 1)}x = 1 + \frac{1}{(3^n)} + \frac{1}{(5^n)} + \frac{1}{(7^n)} + \cdots$$

elimina todos los términos con denominadores divisibles por 2. Después divide la expresión anterior por 3^n y obtiene:

$$\frac{(2^n - 1)}{(2^n)} \cdot \frac{1}{3^n}x = \frac{1}{(3^n)} + \frac{1}{(9^n)} + \frac{1}{(15^n)} + \frac{1}{(21^n)} + \frac{1}{(27^n)} + \cdots$$

resta de la expresión anterior y llega a:

$$\frac{(2^n-1)(3^n-1)}{2^n \cdot 3^n}x = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \cdots,$$

ya que se eliminan todos los términos con denominadores divisibles por 3. Del mismo modo se eliminan, en el lado derecho, las potencias de los denominadores que son divisibles por 5, 7, 11, etcétera, notando que en cada paso se eliminan los sumandos que tienen la potencia del primo correspondiente y también sus múltiplos; de tal forma, dice Euler, que al final se eliminan todos los términos del lado derecho excepto el primero, a saber, el número 1, y del lado izquierdo queda la expresión:

$$\frac{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)\cdots}{2^n\cdot 3^n\cdot 5^n\cdot 7^n\cdot\ \cdots}x=1$$

Para obtener la afirmación del teorema, plantea que el argumento anterior también sirve para probar, repitiendo los pasos anteriores con n=1, que la serie armónica se puede escribir como el producto siguiente:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\frac{2}{(2-1)}\cdot\frac{3}{(3-1)}\cdot\frac{5}{(5-1)}\cdot\frac{7}{(7-1)}\cdot\cdots$$

esto es:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\prod_{p\ \ primo}\frac{p}{p-1}$$

de donde concluye que, como la serie armónica diverge, el número de primos debe ser infinito. Lo que él no dimensionó fue que esta demostración rigurosa del teorema se expandió para la serie de la forma:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

con *s* un número complejo con parte real mayor que 1.

A pesar de estos avances, una característica de este periodo seguía siendo la carencia de formalización de su teoría debido a problemas de rigor y consecuente fundamentación teórica, aspectos que marcaron otra nueva etapa en la historia del cálculo infinitesimal, y en particular del concepto de integral, cuya evolución llevó a transformarlo en el naciente Cálculo Integral, desarrollando y formalizando los conceptos de integral definida y sus extensiones, integrales impropias. Euler en una carta a Goldbach en 1744, explicó que antes de escribir el manual sobre Cálculo infinitesimal consideró que debía desarrollar una serie de temas precedentes, relacionados con los infinitos necesarios para la comprensión del cálculo. En los tres tratados desarrollados sobre cálculo diferencial e integral, Introductio *in analysin infinitorum, Institutiones calculi differentialis* e *Institutiones calculi integralis*, se observa una doble naturaleza: una taxonómica, al proponer una clasificación de funciones y otra de carácter instrumental, donde presentó la descomposición de polinomios como producto de factores simples, correspondientes a raíces reales o dobles, correspondientes a raíces imaginarias. Kim (2009) menciona que Euler ideó métodos de eliminación y descomposición en fracciones simples, proponiendo eliminar toda referencia hecha a la geometría en el estudio de cantidades variables, a través del concepto de cantidad abstracta o universal.

Es interesante notar que Euler fue consecuente del hecho que ahora se alejaba no sólo de la tradición newtoniana de los *Principia*, sino también de la leibniziana. Con la *Mechanica*, Euler enfrentó la dinámica desde el trabajo con cuerpos rígidos, flexibles, y fluidos; la definió como un trabajo sistemático de puntos másicos cuyos resultados son una aplicación sistemática de ecuaciones diferenciales básicas. Con su *Mechanica* mostró que la aplicación del cálculo diferencial e integral a la ciencia del movimiento permitía enfrentar un sinnúmero de situaciones que antes no eran concebibles, lo que conllevó a que el estilo euleriano dominara la escena continental en la física-matemática. La dimensión de los aportes de Euler fue tan amplia que calculó la suma de otras series, que para verlas en perspectiva y comprenderlas, es necesario utilizar conceptos posteriores, esto es adelantarnos casi 100 años, cuando Dirichlet introdujo una generalización de la función zeta de Riemann, para lo cual se hace necesario recordar definiciones pertinentes, reitero en matemática modernas.

Esto es: sí N es un número natural, un carácter de Dirichlet módulo N es un homomorfismo del grupo de unidades del anillo de enteros módulo N al círculo unitario en $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{X}: \left(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}\right)^{*} \to \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^*$$

el carácter se extiende a todo $\mathbb{Z}$, para definir una función multiplicativa $\mathcal{X}: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mediante

$$\mathcal{X}(n) = \begin{cases} \mathcal{X}(\, n \bmod N) & si\ mcd(n, N) = 1, \\ 0 & si\ mcd(n, N) \neq 1. \end{cases}$$

Ahora bien, sí $\frac{m}{N}$ y $\mathcal{X}'$ es un carácter módulo m, éste induce la función $\mathcal{X}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ mediante,

$$\mathcal{X}(a) = \begin{cases} \mathcal{X}(\, a \, mod \, N) & si \; mcd(a, N) = 1, \\ 0 & si \; mcd(a, N) \neq 1. \end{cases}$$

y como $\mathcal{X}$ es un carácter de Dirichlet módulo N del que es posible decir que es inducido por el carácter $\mathcal{X}'$. Un carácter de Dirichlet módulo N se dice que es primitivo si no es inducido por algún carácter módulo *m* para todo $m < N$, y también diremos que en este caso *N* es el conductor de $\mathcal{X}$ y se denotamos por $N = f(\mathcal{X})$.

Si $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ son caracteres de Dirichlet primitivos, de conductores f_1 y f_2, respectivamente, entonces existe un único carácter primitivo $\mathcal{X}$ cuyo conductor f divide al producto $f_1 \cdot f_2$ tal que $\mathcal{X}(a) = \mathcal{X}_1(a)\mathcal{X}_2(a)$ para todo a coprino con $f_1 \cdot f_2$. Al anterior carácter $\mathcal{X}$ se le conoce como el producto de $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$ y se denota $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$. Sin embargo, si $mcd(a, f_1 \cdot f_2) > 1$ no necesariamente se tiene que $\mathcal{X}(a) = \mathcal{X}_1(a)\mathcal{X}_2(a)$.

El conjunto de caracteres de Dirichlet primitivos es un grupo abeliano con el producto anterior y su neutro es el carácter trivial o principal $\mathcal{X}^0: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\mathcal{X}^0(n) = 1$ para todo n. Se observa que $\mathcal{X}^0$ es el único carácter con conductor 1. El inverso del carácter primitivo $\mathcal{X}$ es el carácter $\overline{\mathcal{X}}$ dado por conjugación compleja, esto es, $\overline{\mathcal{X}}(a) = \overline{\mathcal{X}(a)}$, para $a \in \mathbb{Z}$. Elementos importantes para probar que dado un carácter de Dirichlet (primitivo) $\mathcal{X}$, se define su *L-serie de Dirichlet* mediante la expresión:

$$\mathcal{L}(\mathcal{X}, s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}(n)\, n^{-s}$$

para un complejo *s* tal que *Re(s) > 1*. Se observa que si $\mathcal{X}^0$ es el carácter trivial, entonces $\mathcal{L}(\mathcal{X}, s) = \zeta(s)$ que es la función zeta de Riemann. En forma análoga a la demostración dada anteriormente del teorema de Euler, más aún, se puede probar que $\mathcal{L}(\mathcal{X}, s)$ converge absoluta y uniformemente en un semiplano de $\mathbb{C}$ y define una función holomorfa en el semiplano *Re(s) > 1*. De hecho, si $\mathcal{X} \neq \mathcal{X}^0$:

es primitivo, a diferencia del caso de la función zeta de Riemann, prueba que $\mathcal{L}(\mathcal{X}, s)$ tiene una continuación analítica a todo $\mathbb{C}$. La multiplicatividad de $\mathcal{X}$, *i.e.*, $\mathcal{X}(mn) = \mathcal{X}(m)\mathcal{X}(n)$ y la condición de que $|\mathcal{X}(n)| \leq 1$, implican la existencia de un producto de Euler de la forma:

$$\mathcal{L}(\mathcal{X}, s) = \prod_{p\ primo} (1 - \mathcal{X}(p)p^{-s})^{-1}.$$

En esta misma dirección, para esta época, Fagnano estudiaba algunas integrales elípticas, en particular aquellas asociadas a la longitud de arco de la lemniscata:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}$$

y que había publicado entre 1714 y 1720 en algunas revistas italianas de poca circulación; lo interesante de este trabajo es que Fagnano obtuvo, una fórmula para duplicar un arco de lemniscata dado y Euler, que había estado siguiendo el trabajo de sus contemporáneos acerca de integrales elípticas, se interesó de inmediato por las fórmulas de Fagnano de tal forma que cinco semanas después, en 1752, presentó resultados donde explicó y comenzó a extender los aportes de Fagnano hasta obtener una fórmula para sumar dos longitudes de arco arbitrarias de la lemniscata; guiado por la analogía con la longitud de arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, de radio 1 y centro el origen (0, 0), determinó que la longitud de arco en el primer cuadrante está dado por la integral:

$$s(r) = \int_0^r \frac{dz}{\sqrt{1 - x^2}}$$

para este caso se sabe que un cambio de variable trigonométrica permite calcular estas integrales. Sin embargo, existe una forma más sistemática de calcular las integrales anteriores, parametrizando el círculo usando la pendiente de las rectas que pasan por uno de sus puntos, en particular $A = (-1,0)$, donde después de resolver las ecuaciones polinomiales correspondientes el cambio de variable que se sugiere es $x = \frac{2m}{1+m^2}$ que, al substituir en la integral para la longitud de arco del círculo, racionaliza el integrando ya que:

$$s(r) = \int_0^r \frac{dz}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^t \frac{2dm}{1 + m^2},$$

para $t = \frac{2r}{1+r^2}$ que se calcula de forma elemental; en este sentido, desde la visión de las matemáticas modernas, se diseñó una articulación entre modelación matemática e integración trigonométrica aplicada a estudiantes universitarios con el objeto de observar el desarrollo de competencias matemáticas, (ver Mateus-Nieves, 2023). Ahora, para la lemniscata cuyas ecuaciones paramétricas es posible escribir como $2x^2 = m^2 + m^4$ y $2y^2 = m^2 - m^4$ respectivamente (Euler, 1753, p. 40). Despeja x e y en términos del parámetro m, y restringe al primer cuadrante donde el parámetro varía en el intervalo [0, 1], cuya longitud de arco correspondiente es:

$$s = s(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - x^4}}$$

y al proceder por analogía con el caso de la longitud de arco del círculo, observa que ahora se tiene $\sqrt{1 - x^4}$ en lugar de $\sqrt{1 - x^2}$, lo que sugiere el cambio de variable $x = \frac{2m^2}{1+m^4}$, que, evidentemente es monótona y suprayectiva cuando $0 \leq m \leq 1$, y que al hacer las substituciones correspondientes en la integral anterior se obtiene

$$s = s(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - x^4}} = \sqrt{2} \int_0^t \frac{dm}{\sqrt{1 + m^4}}.$$

donde es evidente que, a diferencia del caso del círculo, el cambio de variable propuesto no racionalizó el integrando. Sin embargo, Fagnano y Euler consideran ahora la integral del lado derecho para la cual el cambio de variable análogo que se sugiere es $m = \frac{2u^2}{1-u^4}$ que al substituirlo en la integral del lado derecho queda

$$s = s(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{2}\int_0^t \frac{dm}{\sqrt{1+m^4}} = \sqrt{2}\sqrt{2}\int_0^v \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

esto es, $s(r) = 2s(v)$ donde $r = \frac{2v\sqrt{1-v^4}}{1+v^4} \triangleq.$ $[*]$.

A pesar que no es posible racionalizar el integrando de la longitud de arco de la lemniscata, sí se tiene la fórmula $[*]$ permite duplicar la longitud de arco de la misma. Euler generaliza lo anterior y obtiene una fórmula para sumar dos longitudes de arco arbitrarias de la lemniscata. Estos resultados alcanzan mayor desarrollo con los trabajos de Abel y Jacobi, como inversión de integrales abelianas, que en el caso de la integral de la longitud de arco del círculo unitario:

$$s(r) = \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

pensada como una función de *r*, su función inversa, en el intervalo correspondiente, *es r = sen(s)* que satisface la fórmula de aditividad $sen\,(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + cos\alpha\ sen\,\beta$, que al reemplazar $x = sen\,\alpha$ y $y = sen\,\beta$, se tiene que $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$ y $\cos\beta = \sqrt{1-y^2}$, por lo que $sen\,(\alpha+\beta) = x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}$, de donde se obtiene que para $z = \alpha+\beta = sen^{-1}\big(sen(\alpha+\beta)\big)$ se alcanza la *fórmula de la aditividad* :

$$\int_{0}^{x} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} + \int_{0}^{y} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{0}^{z} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

donde $z = x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}$. Que representan las fórmulas de aditividad para la integral,

$$\int_{,}^{t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

y que son las que Euler generalizó para la lemniscata y otros polinomios de grado cuatro. Resultados que se consideran el nacimiento del estudio de *la ley de grupo en una curva elíptica*, en este caso dada por la retícula en $\mathbb{C}$ asociada a los dos períodos de la integral elíptica considerada. Como se puede observar, los aportes de Euler fueron de tal magnitud que en un siglo después ya fue posible definir una curva elíptica *E* como el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{C}^2$ que satisfacen un polinomio cúbico en dos variables. La fórmula de adición que encontró Euler corresponde al hecho que los puntos de la curva *E* se pueden sumar de tal manera que *E* tiene estructura de grupo abeliano, una propiedad que no tienen otras curvas de género distinto de 1. Estos aportes se extienden a la teoría de números, donde interesa considerar curvas elípticas definidas por polinomios con coeficientes racionales que, después de eliminar denominadores y cambiar variables adecuadamente, se pueden considerar como curvas definidas por polinomios con coeficientes enteros.

LOS APORTES DE SIMPSON, CLAIRAUT, LAGRANGE Y D'ALEMBERT

Simpson[59] conocido por sus trabajos en el subcampo matemático del análisis numérico, que denominó interpolación a la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto de puntos. Actualmente en ingenierías y otras ciencias es frecuente disponer de un cierto número de puntos obtenidos por muestreo o a partir de un experimento y pretender construir una función que los ajuste. Si se tiene una función cuyo cálculo resulta complicado, es posible a partir de un cierto número de valores interpolar dichos datos construyendo una función más simple. En general, no obtendremos los mismos valores evaluando la función obtenida que si evaluamos la función original, si bien dependiendo de las características del problema y del método de interpolación usado la ganancia en eficiencia puede compensar el error cometido. La idea es que, a partir de n parejas de puntos (x_k, y_k), obtener una función f que verifique $f(x_k) = y_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n$, a la que denomina función interpolante de dichos puntos. A los puntos x_k les llama nodos. Algunas formas de interpolación que se utilizan con frecuencia son la interpolación lineal y la polinómica, donde la lineal se convierte en un caso particular de la polinómica. En términos generales, la interpolación lineal se utilizan dos puntos, (x_a, y_a), y (x_b, y_b), para obtener un tercer punto interpolado (x, y) a partir de la siguiente fórmula:

$$y = y_a + (x - x_a) \cdot \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)}$$

[59] Thomas Simpson (1710-1761). Matemático inglés.

la interpolación lineal es rápida y sencilla, pero en ciertos casos no muy precisa.

Con relación a su obra sobre integración numérica, actualmente en un curso de análisis numérico, constituye una amplia gama de algoritmos para calcular el valor numérico de una integral definida y, por extensión, el término se usa a veces para describir algoritmos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales. El término *cuadratura numérica,* a menudo abreviada *cuadratura,* es sinónimo de *integración numérica*, especialmente si se aplica a integrales de una dimensión, a pesar de que, para el caso de dos o más dimensiones, integrales múltiples, también se utiliza. El problema básico considerado por la integración numérica es calcular una solución aproximada a la integral definida: $\int_a^b f(x)dx.$ Este problema también puede ser enunciado como un problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria en los siguientes términos: $y'(x) = f(x),\ \ y(a) = 0.$ Encontrar $y(b)$ es equivalente a calcular la integral. Actualmente hay varias razones para llevar a cabo la integración numérica, la principal puede ser la imposibilidad de realizar la integración de forma analítica; esto es, integrales que requerirían de un gran conocimiento y manejo de matemáticas avanzadas pueden ser resueltas de una manera más sencilla mediante métodos numéricos. Incluso existen funciones integrables cuya primitiva no puede ser calculada, siendo la integración numérica de vital importancia. La solución analítica de una integral arroja una solución exacta, mientras que la solución numérica da una solución aproximada. El error de aproximación, que depende del método que se utilice y de qué tan preciso sea, puede llegar a ser tan pequeño que es posible obtener un resultado idéntico a la solución analítica en las primeras cifras decimales.

Hay variedad de métodos basados en aproximar la función $f(x)$ a integrar por otra función $g(x)$ de la cual se conoce la integral exacta. La función que sustituye la original se encuentra de forma que en un cierto número de puntos tenga el mismo valor que la original. Como los puntos extremos forman parte siempre de este conjunto de puntos, la nueva función se llama *una interpolación* de la función original. Cuando los puntos extremos no se utilizan para encontrar la función que sustituye a la original entonces se dice *extrapolación*. Regularmente estas funciones son polinomios.

Ejemplos de la interpolación con polinomios evaluada en puntos equidistantes separados en $[a, b]$ son las fórmulas de Newton-Cotes, la regla del rectángulo, la del trapecio y la de Simpson. Si se escogen los nodos hasta $k = n + 1$ incluidos los extremos del rango, será la fórmula de Newton-Cotes cerrada y si se escogen $k = n - 1$o que no incluyen en los datos tabulados los extremos será la fórmula de Newton-Cotes abierta. El método más simple de este tipo es hacer que la función interpoladora sea una función constante, lo que genera un polinomio de orden cero, que pasa a través del punto $(a, f(a))$; hoy se conoce este método como *la regla del rectángulo*, comúnmente notada:

$$\int_a^b f(x)dx \sim (b-a)f(a)$$

Ahora bien, si en el método anterior la función pasa a través del punto $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ este método recibe el nombre de: *regla del punto medio*, notado como:

$$\int_a^b f(x)dx \sim (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

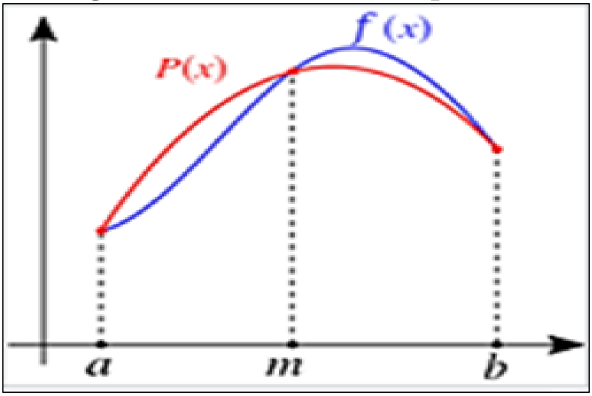
La *regla del trapecio* corresponde al caso donde el polinomio sustituto de la ecuación original es del primer orden, aunque la fórmula original no pase por el punto $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. Entonces si:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right] \, dx$$

cuya regla de integración es: $I = (b - a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ corresponde a la misma fórmula usada en la regla del punto medio. Ahora bien, si la función interpoladora es, por ejemplo, un polinomio de grado 2 que pasa a través de los puntos $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ y $(b, f(b))$, el método recibe el nombre de la *regla de Simpson*, a veces también llamada *regla de Kepler*, consistente en un método de integración numérica que se utiliza para obtener la aproximación de la integral, en los siguientes términos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Figura 32 - Polinomio interpolante



Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 32, la función $f(x)$ en color azul, es aproximada por otra función $P(x)$, en este caso cuadrática de color rojo. Veamos en términos modernos cómo se hace una deducción de la regla de Simpson. Se considera un polinomio interpolador de orden dos $P_2(x)$ que aproxima a la función integrando $f(x)$ entre los nodos $x_0 = a, \quad x_1 = b$ y $m = \frac{a+b}{2}$.

La expresión de ese polinomio interpolante, expresado a través de la interpolación polinómica de Lagrange es:

$$P_2(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}$$

de esta forma, la integral buscada es

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

equivalente a:

$$I = \int_a^b P_2(x)dx + término\ error$$
$$= \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(m) + f(b)] + E(f),$$

donde $E(f)$es el término de error, por tanto, es posible aproximar como:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(m) + f(b)].$$

El término error $E(f)$, llamado *error global*, Wussing (1998, p. 141) lo presenta como la correspondencia a: $E(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$, donde $h = \frac{b-a}{2}$ y ξ pertenece al intervalo $[a,b]$. Con esa aproximación se hace posible estimar el error cometido al aproximar la integral mediante este método. Si las cuatro primeras derivadas de $f(x)$ son continuas en el intervalo, entonces el error, en términos absolutos, queda acotado como:

$$|E(f)| = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_2(x)\,dx\right| \le \frac{h^5}{90}\max_{a\le\xi\le b}\left|f^{(4)}(\xi)\right|,$$

donde, nuevamente $h = \frac{b-a}{2}$ y $\xi \in [a,b]$ $\triangleq$.

Entre las principales obras publicadas por Simpson están: *Treatise of Fluxions* 1737, *The Nature and Laws of Chance* 1740, *The Doctrine of Annuities and Reversions* 1742, *Mathematical Dissertation on a Variety of Physical and Analytical Subjects* 1743, *A Treatise of Algebra* 1745, *Elements of Geometry* 1747, *Trigonometry, Plane and Spherical* 1748, *Select Exercises in Mathematics* 1752, *Miscellaneous Tracts on Some Curious Subjects in Mechanics, Physical Astronomy and Speculative Mathematics* 1757.

Clairaut[60], caracterizado por su precocidad, se menciona que a los 13 años de edad presentó su primer trabajo científico, en geometría, a la *Académie des Sciences*. Estudió la determinación de la forma de la tierra, midió latitud y longitud, es considerado junto con Johan Bernoulli, Euler y D'Alembert, uno de los fundadores de la hidrodinámica. Formuló ecuaciones de movimiento para cuerpos sumergidos en líquidos. Hizo aportes en geometría, estableció la ecuación diferencial de Clairaut y soluciones singulares, calculó con precisión el perihelio del cometa Halley en 1759.

La ecuación diferencial de Clairaut, es una ecuación diferencial ordinaria de la forma: $y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ donde y es función de x. Para resolver la ecuación, diferencia respecto a dx, quedando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$$

que se reduce a:

[60] Alexis Claude Clairaut (1713-1765), matemático y astrónomo francés.

$$0 = \left[x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] \frac{d^2y}{dx^2}$$

se tiene que

$$0 = \frac{d^2y}{dx^2}$$

o

$$0 = x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

En el primer caso, $c = \frac{dy}{dx}$ para cualquier constante arbitraria c. Sustituye en la ecuación de Clairaut, para tener la familia de rectas cuyas ecuaciones están dadas por: $y(x) = c_x + f(c)$, llamadas *soluciones generales* de la *ecuación de Clairaut* (CLAIRAUT, 1734, p. 201-202). Para el otro caso define solo una solución $y(x)$, denominada *solución singular*, cuyo gráfico es envolvente de las gráficas de las soluciones generales. La solución singular se representa normalmente usando notación paramétrica, como: $(x(p), y(p))$, donde *p* representa $\frac{dy}{dx}$.

Lagrange, trabajó conforme a los lineamientos de Euler, el objeto de sus cálculos fueron las clases de funciones simples y multivariadas, en lugar de curvas, superficies y ecuaciones diferenciales parciales. Lagrange determinó un "factor integrante para la ecuación lineal general, y completó la prueba de la solución general de una ecuación lineal homogénea de orden *n*" (LAGRANGE, 1749, p. 91). Entre los principales logros del siglo XVIII, está la aparición del análisis infinitesimal entendido como la culminación de un largo período de desarrollo matemático, ya que durante el siglo XVII se habían formado premisas esenciales como:

la existencia del álgebra ya formada y de la técnica de cálculo, introducción en las matemáticas de la variable y el método de coordenadas; Los intentos por resolver problemas físicos, llevaron gradualmente a considerar modelos matemáticos que contienen una ecuación, en la que una función y sus derivadas juegan un papel importante, posteriormente conocidas como *Ecuaciones Diferenciales* y si la función es de una sola variable independiente, son llamadas *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. De esta forma Lagrange, dio un tratamiento completamente analítico de la mecánica, realizó contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales, la teoría de números, desarrolló la teoría de grupos y la propuesta de fundamentar el cálculo sobre un álgebra formal de series de potencias. Si bien la idea de Lagrange de evitar el uso de límites no fue apropiada, su propuesta, concreta en su obra *Théorie dés-foncions analytiques* de 1797, tuvo el efecto de liberar el concepto de derivada de sus significaciones tradicionales. De hecho, la terminología *función derivada*, así como la notación $f'(x)$ para representar la derivada de una función f, fueron introducidas por Lagrange en dicho texto. A partir de este momento la derivada deja de ser algo de naturaleza imprecisa, fluxión o cociente diferencial, y empieza a ser considerada simplemente como una función.

Partiendo del trabajo de Lagrange, D'Alembert[61] encontró las condiciones bajo las cuales el orden de una ecuación diferencial lineal puede ser disminuido. Derivado de un método para tratar los casos excepcionales, resolvió el problema de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes, e inició el estudio de sistemas diferenciales lineales (D'ALEMBERT, 1767). En su *Tratado de dinámica*, formuló el conocido *principio de D'Alembert*, relacionado con cualquier sistema mecánico donde además de las fuerzas que controlan su evolución, existen cierto número de ligaduras que precisan su movimiento. Para evitar este desconocimiento,

[61] Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), matemático francés.

reformuló la Mecánica de modo que estas fuerzas no aparecen explícitamente, lo que lo lleva a confirmar la existencia de la inercia en un punto material, como la reacción ejercida por ese punto frente a las fuerzas que actúan sobre él. Reconoce que todos los cuerpos tienen una tendencia a permanecer en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme. Lo interpreta como una resistencia inercial al cambio denominándolo fuerza inercial. Hoy sabemos que la forma más conocida de esta fuerza inercial es la fuerza centrífuga. En la ecuación de D'Alembert, la fuerza inercial $\frac{dpi}{dt}$ aparece en igualdad con la fuerza aplicada *Fi*, reduciendo el problema dinámico a un problema estático. Esta interpretación fue duramente atacada por algunos autores, en particular Heinrich Hertz. Para un sistema en equilibrio, el Principio de D'Alembert se reduce a la condición que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea cero y lo denota

$$\sum_i F_i \delta r_i = 0$$

La descomposición de la fuerza F_i sobre la partícula *i* en fuerzas aplicadas F_i^A y fuerzas de restricción F_i^C da:

$$\sum_i^N F_i^A \cdot \delta r_i + \sum_i^N F_i^c \cdot \delta r_i = 0$$

el segundo término en la ecuación puede ignorarse si el trabajo virtual debido a las fuerzas de restricción es cero. Esta ley se conoce con el nombre de *Principio de los Trabajos Virtuales* y representa una herramienta útil para el estudio de estos sistemas. A manera de síntesis, la aplicación del trabajo virtual a la estática conduce principalmente a ecuaciones algebraicas entre las fuerzas, mientras que el principio de D'Alembert aplicado a la dinámica conduce a ecuaciones diferenciales. De este trabajo es posible inferir que la primera figura que abrió el camino para la reformulación moderna de la idea del *paso al límite* fue D'Alembert, al que le siguieron importantes trabajos de replanteamiento conceptual y rigorización lógica: Bolzano, Abel, Cauchy, Weierstrass, Dedekind que llegan hasta Cantor. Estos trabajos establecieron la pauta, características y sentidos del análisis matemático y su enseñanza hasta nuestros días.

La productividad matemática en el siglo XVIII se concentró en el Cálculo y en sus aplicaciones a la Mecánica, de ahí que los aportes de Laplace sobre el cálculo de diferencias finitas editado por Lagrange, le aseguró un rápido ascenso en el estudio de problemas de valores extremos, aplicaciones del Calculo Integral a la solución de ecuaciones en diferencias, soluciones singulares de Ecuaciones Diferenciales y problemas de Astronomía Matemática. Se destacan dos trabajos en los que unifica no solamente sus propias investigaciones sino también gran parte del trabajo previo, estos son: la *Mecanica Celeste*, publicada en 5 volúmenes entre 1799 y 1825, reconocida como la culminación de los trabajos de varias generaciones de matemáticos Kepler, Galileo, Newton, Clairaut, D'Alembert, Euler y Lagrange. La otra, *Teoria Analitica de Probabilidades*, publicada en 1812, describió un cálculo para asignar una credibilidad racional a sucesos aleatorios, basándose en la teoría de permutaciones y combinaciones.

En 1785, Laplace dio un paso clave en el uso de integrales en forma de transformaciones de ecuaciones diferenciales, que simplemente eran la forma de la solución, y encontró que la ecuación transformada era fácil de resolver, incluso más que la original (GRATTAN-GUINNESS, 1997), dichas expresiones son:

$$z = \int X(x)e^{ax}\, dx, \text{ y } z = \int X(x)x^{a}\, dx.$$

Laplace escribió *Teoría analítica de las probabilidades* en 1812 y *Mecánica celeste* entre 1799 y 1825, lo que le valió el sobrenombre del *Newton francés*. Se le comparó con Euler que escribió textos sobre cálculo, mecánica y álgebra que se convirtieron en modelos a seguir para otros autores interesados en estas disciplinas, el éxito de Euler junto al de estos matemáticos de finales de siglo por resolver problemas tanto matemáticos como físicos utilizando el cálculo sólo sirvió para acentuar la falta de un desarrollo adecuado y justificado de las ideas básicas del cálculo.

Se había llegado al estudio de cuestiones muy complicadas a las que no se les conocía o veía un alcance claro. El Cálculo Integral incluía además de la integración de funciones, problemas de la teoría de las ecuaciones diferenciales, el cálculo variacional y la teoría de funciones especiales. Euler presentó el Cálculo Integral como un método de búsqueda, dada la relación entre los diferenciales o la relación entre las propias cantidades. La operación con lo que lo obtuvo la denominó integración, donde el concepto primario era la integral indefinida. El propio Cálculo tenía el objetivo de elaborar métodos de búsqueda de funciones primitivas para funciones de una clase lo más amplia posible partiendo del concepto de integral indefinida. Introdujo un sistema completo de definiciones, junto con una constante aditiva arbitraria que denominó total. Reconoció que la fijación de esa constante arbitraria conducía a una integral parcial. Lo que se destaca aquí es que el valor de esta última, para cierto valor determinado del argumento, daba el equivalente a la integral definida. Esta sucesión armoniosa resultó imposible de mantener en las aplicaciones dada la necesidad de distinguir entre integración definida de indefinida, situación que generó nuevos conflictos que no fueron solucionados inmediatamente. Se usaba indistintamente el símbolo implementado por Leibniz $\int f(x)dx$, tanto para las unas como para las otras. El símbolo al que estamos acostumbrados $\int_a^b \int f(x)dx$ para notar una integral definida, fue encontrado por Fourier entre 1819 y 1822. Lo que se pretende mostrar es que entre los siglos XVII y XIX el desarrollo del cálculo infinitesimal se centró en la formalización rigurosa del cálculo Integral por la serie de problemas de carácter especial que debía enfrentar. Los esfuerzos en su resolución condujeron a la elaboración de nuevas ramas del Análisis Matemático, estas últimas, tarde o temprano se separaron de su fuente inicial, el Cálculo Integral del siglo XVIII.

LOS APORTES DE ADRIEN LEGENDRE, CARNOT, Y GAUSS

A finales del siglo XVIII el cálculo infinitesimal siguió desarrollándose con los aportes de Adrien Legendre[62]. Sus primeros trabajos estuvieron centrados en mecánica. En 1794 publicó los *Elementos de geometría*, una versión reordenada y simplificada de la obra original de Euclides que alcanzó multitud de reediciones y que fue traducida a más de treinta idiomas. Introdujo conceptos como la función que lleva su nombre y la primera demostración, anterior a la de Gauss, del método de los mínimos cuadrados. Fue el primero en dedicar una obra estrictamente a la teoría de números (*Théorie des nombres*, en 1830), donde obtuvo resultados fundamentales como la demostración de la ley de la reciprocidad cuadrática. Se destaca su *Tratado de las funciones elípticas y de las integrales eulerianas* (1817-1832), donde siguiendo los pasos de sus predecesores Euler y Lagrange, estudió de forma sistemática las

[62]Adrien-Marie Legendre. (1752-1833). Matemático francés, su trabajo sobre integrales elípticas proporcionó herramientas analíticas básicas para la física matemática.

funciones elípticas y las redujo a tres formas básicas, que ahora son conocidas por su nombre. También compiló tablas de los valores de sus integrales elípticas y mostró cómo se pueden usar para resolver problemas importantes en mecánica y dinámica.

El interés por aritmetizar las matemáticas se basaba en que el número era un dato, una idea a priori, y de ahí que no se tuviera conciencia de la necesidad de aclararlo. Las propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado de la recta quedaban demostradas sólo en parte al no disponer de una teoría sobre los números reales. La condición de Cauchy para la convergencia de sucesiones y series de números, las construcciones de la integral estaban incompletas. Pero llama la atención las funciones continuas no diferenciables. Todo ello exigía una aclaración del sistema de los números reales. En aras de encontrar respuestas se dieron varias construcciones diferentes. Las más utilizadas son las de Cantor y Dedekind; ambas tenían como punto de partida el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. En ellas el conjunto de los números reales deja de ser una idea a priori para ser construido a partir de otros conceptos. Pero aquí el problema eran los números irracionales.

A pesar que durante el siglo XVIII se habían utilizado sin problemas y se suponía que para ellos eran válidas las mismas propiedades y operaciones que para los racionales. Se decía de ellos que se aproximaban por racionales y eso bastaba. Después se precisó que eran el límite de números racionales. Cantor aclaró que primero había que construirlos y después ver si eran límite de algo. Weierstrass, en 1859, habló claramente de la necesidad de hacer una teoría sobre estos números. El origen de la construcción de Dedekind es la idea de continuidad de la recta, ligada a la teoría de las magnitudes de Eudoxo. Observó que la continuidad consistía en que partir la recta en dos, de forma que una parte quede a un lado de la otra, sólo es posible hacerlo tomando un punto de la recta (esto era un axioma geométrico en su tiempo), observó que eso no ocurría con los números racionales. De la teoría de Eudoxo dedujo que la relación entre dos magnitudes inconmensurables divide a los racionales en dos clases con esa propiedad. De aquí obtuvo la idea de cortadura y denominó número real a una cortadura del conjunto $\mathbb{Q}$. Definió la suma, el producto y el orden sin demasiadas dificultades y probó que, haciendo cortaduras en los reales, no se obtenían nuevos números. Seguidamente demostró que toda sucesión monótona creciente y acotada tiene límite. Eso era suficiente para dejar bien aclarados los problemas de su tiempo. Por su parte Abel vio enfrenta la necesidad de un concepto de convergencia más fuerte que la convergencia puntual, aun de que se conserve la continuidad, para ellos trabajó con integrales elípticas de Euler, que se expondrá en detalle más adelante. Stokes dio la definición correcta de convergencia uniforme.

Cabe resaltar que las funciones elípticas ya eran conocidas desde la época de Wallis en 1655, al punto que Newton y Wallis publican en conjunto una expansión infinita para calcular la longitud de un arco de elipse. Recordemos que una función elíptica no es una elipse, más bien está vinculada con la noción de integrales elípticas, que reciben ese nombre porque aparecen naturalmente cuando se quiere encontrar la longitud de un arco de elipse. Así como el estudio de la longitud de la circunferencia da origen a las funciones trigonométricas, el cálculo de la longitud de los arcos de la elipse da origen a las integrales elípticas y a sus funciones inversas, las funciones elípticas. Temas que captaron la atención de muchos matemáticos y que dieron origen a importantes descubrimientos particularmente en teoría de números. El ultimo teorema de Fermat es un ejemplo de ello, así como nuevos métodos de factorización de números en sus factores primos.

La definición formal de una función elíptica se establece a partir de la siguiente integral

$$\int r\left(x, \sqrt{p(x)}\right)\ dx\ \ [*_1]$$

donde $r(x, y)$ es una función racional y $p(x)$ es un polinomio de orden tres o cuatro sin raíces múltiples. Aquí es importante recordar que en 1679 Jacob Bernoulli encontró una integral elíptica tratando de calcular la longitud de una espiral. Para 1694 se dio un paso importante en la teoría de funciones elípticas analizando la forma de una varilla elástica comprimida en ambos extremos. Demostró que la curva satisfacía una integral de la forma

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^4}}.$$

Las funciones elípticas fueron origen de numerosas investigaciones en matemáticas puras y aplicadas entre ellas: *factorización de enteros* con desarrollo de un algoritmo de factorización de enteros basado en curvas elípticas que resultó más sencillo que los métodos convencionales de la teoría de números.

Carnot[63] es conocido por su *Essai sur les machines en général* (Ensayo sobre las máquinas en general, 1786), donde precisa las leyes del choque y enuncia la ley de conservación del trabajo. Escribe *Metafísica del Calculo infinitesimal* en 1797 donde expone características de las diferentes versiones que del Cálculo se tenían en la época, refiriéndose como Análisis Infinitesimal a la propuesta leibniziana. En la introducción de sus Reflexiones escribió:

[63] Lazare Nicolas Marguerite Carnot (17563-1823), político y matemático francés.

> Hay varias maneras de resolver cuestiones que son de la competencia del análisis infinitesimal; y aunque ninguna de ellas parece reunir las mismas ventajas, no es menos interesante conocer cuáles son los distintos puntos de vista desde los cuales los principios de esta teoría pueden ser enfocados; es por esto que yo me propongo aquí echar un vistazo sobre los diversos métodos con los que se cuenta y que la pueden sustitui (CARNOT, 1813, p. 05).

Lo que permite inferir que Carnot asumió que las distintas presentaciones del Cálculo no eran mutuamente excluyentes, de manera que puede ser utilizada una de ellas en lugar de otra. En su libro, describió, en los dos primeros capítulos, los principios generales del Análisis Infinitesimal, y algunas de sus aplicaciones. En el tercero, los Métodos por los que el Análisis Infinitesimal puede ser sustituido. Carnot analizó los métodos de: exhaución, de los indivisibles, de las indeterminadas, que atribuyó a Descartes, de las primeras y últimas razones o de los límites, de las fluxiones, el de las cantidades evanescentes, para el que señala como principal representante a Euler, y la Teoría de las Funciones Analíticas de Lagrange o funciones derivadas. Llama la atención, la indicación de Carnot de que todas las presentaciones antes indicadas son equivalentes entre sí, no siendo más que distintas versiones del método de exhaución de los antiguos griegos:

> [...] los diversos métodos, cuya idea hemos dado en este escrito, no son, para hablar propiamente, sino un mismo método, presentado desde diversos puntos de vista. Siempre es el método de exhaución de los antiguos, más o menos simplificado, más o menos felizmente adaptado a las necesidades del cálculo y reducido a un algoritmo regular (CARNOT, 1813, p. 159).

Se mostró convencido que la propuesta leibniziana era la que, desde el punto de vista de la modelación de fenómenos físicos presentaba más ventajas. Por otra parte, es claro que para entonces era inminente que, en la búsqueda del rigor, los matemáticos terminaron por desechar los infinitesimales del Análisis, y con ello todo un método con las ventajas señaladas. Esa situación parece haber provocado cierta inquietud en Carnot, al punto que señaló:

> El mérito esencial, el sublime, podría decirse, del método infinitesimal, es el de reunir la facilidad de los procedimientos ordinarios de un simple cálculo de aproximación, con la exactitud de los resultados del análisis ordinario. Esta inmensa ventaja se perdería, o al menos, sería fuertemente disminuida, si a este método puro y simple, como el que nos ha dado Leibniz, se deseara, bajo la apariencia de un mayor rigor, sustituir por otros menos naturales, menos cómodos, menos conformes a la marcha probable de los inventores.
>
> Si este método es exacto, como nadie lo duda hoy en día, si es a él al que siempre se recurre para las cuestiones difíciles, como todo el mundo conviene, ¿por qué recurrir a medios desviados y complicados para sustituirlo? (CARNOT, 1813, p. 73-74).

Conforme al texto citado, se infiere que, aunque Carnot no indicó a cuál método se refirió, parece ser que era al método expuesto por Lagrange. Ahora bien, si Carnot se mostró preocupado por que el Análisis Infinitesimal leibniziano pudiera ser sustituido por la propuesta de Lagrange, más lo habría estado si hubiese conocido la propuesta de Cauchy. Lamentablemente Carnot muere exiliado en 1823, año en que se publicaron las *Lecciones sobre Cálculo infinitesimal*, y dos años después de la publicación del *Curso de Análisis*, obras de Cauchy. Es clave reconocer que Carnot al igual que Monge aparece como uno de los creadores de la geometría moderna, su obra cumbre, *Geometría de posición* en 1803.

Entre los trabajos de Karl Gauss sobresalen:

- El algoritmo de álgebra lineal usado para hallar inversas y matrices, así como determinar la solución de sistemas de ecuaciones de línea, y el método de eliminación de Gauss-Jordan.
- La aproximación de una integral no como una forma de espacio igualado, sino como una función que elige los puntos de revisión de manera adecuada, denominada *Cuadratura de Gauss* que permite integrar cualquier función analítica a través de un algoritmo. Se parte de un esquema de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} W_i f(x_i)$$

Donde:

✓ W_i son coeficientes arbitrarios
✓ $x_i \in [a,b]$

Este esquema implica que se deben elegir $2n$ parámetros para resolver la integral y representan un polinomio de grado máximo $2n-1$.

- El Transverse Mercator, sinónimo del sistema de proyección en cartografía, denominado Sistema Gauss- Krüger.
- El sistema que propone que las superficies conectan su topología con su geometría, denominado Teorema de Gauss-Bonnet.

- Teorema que relaciona el valor de la integral de superficie del flujo definido por este campo con la divergencia matemática de un campo vectorial, también llamado teorema de Gauss-Ostrogradsky, teorema de la divergencia o teorema de Gauss.

El Teorema de la Divergencia, también llamado *Teorema de Gauss*, relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de su divergencia en el volumen encerrado por dicha superficie. Resultado importante en física particularmente en electroestática y en dinámica de fluidos. El teorema fue descubierto originariamente por Lagrange en 1762, e independientemente por Gauss en 1813, y en 1831 por Ostrogradsky, que también dio la primera demostración del resultado. Para comprender este teorema es necesario recordar los tipos de superficies cerradas en $\mathbb{R}^3$. Para formalizar el concepto, recordemos que existen cuatro tipos de regiones cerradas en $\mathbb{R}^3$:

Regiones tipo I: Una región $\Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^3$ se dice de tipo I si se describe como:

$$\Omega = \{(x, y, z): (x, y) \in D, \phi_1(x, y) < z < \phi_2(x, y)\},$$

donde $D \sqsubseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental y ϕ_1 y $\phi_2: D \to \mathbb{R}$.

Regiones tipo II: una región $\Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^3$ es de tipo II si se describe como:

$$\Omega = \{(x, y, z): (x, y) \in D_2, \varphi_1(x, z) < y < \varphi_2(x, z)\}$$

donde $D \sqsubseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental y φ_1 y $\varphi_2: D \to \mathbb{R}$.

Regiones tipo III: una región $\Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^3$ es de tipo III si se describe como:

$$\Omega = \{(x, y, z): (y, z) \in D_2, \theta_1(y, z) < x < \theta_2(y, z)\}$$

donde $D \sqsubseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental y θ_1 y $\theta_2: D \to \mathbb{R}$.

Regiones tipo IV: una región $\Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^3$ es de tipo IV si es de tipo I, II, y III.

En estos términos, la definición del teorema de Gauss se plantea así: sea $\Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^3$ una región de tipo IV, con $S = \partial\Omega$ superficie cerrada, regular a trozos y orientada con normal exterior η.

Sea $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces:

$$\int\int_S \; F \cdot \eta \, dS = \int\int\int_\Omega \; \nabla \cdot F \; dxdydz.$$

alternativamente,

$$\int\int_S \; F = \int\int\int_\Omega \; div(F) dxdydz.$$

da la demostración en los siguientes términos: como F es un campo C^1, se tiene

$$F(x, y, z) = \; (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)\,)$$

donde cada componente $F_i: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \cdots$ cuenta con derivadas parciales de primer orden continuas. Se observa que:

$$\iiint_{\Omega} div(F)dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x} dx\,dy\,dz + \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial y} dx\,dy\,dz + \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z} dx\,dy\,dz,$$

por otra parte

$$\iint_{S} F \cdot \eta dS = \iint_{S} (F_1, 0,0) \cdot \eta dS + \iint_{S} (0, F_2, 0) \cdot \eta dS + \iint_{S} (0,0, F_3) \cdot \eta dS.$$

ahora es suficiente probar que valen las siguientes tres igualdades:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial y} dx\,dy\,dz = \iint_{S} (F_1, 0,0) \cdot \eta\, dS,$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial y} dx\,dy\,dz = \iint_{S} (0, F_2, 0) \cdot \eta\, dS,$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial y} dx\,dy\,dz = \iint_{S} (0,0, F_3) \cdot \eta\, dS$$

prueba la última de las tres, esto es:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial y} dx\, dy\, dz = \iint_{S} (0,0,F_3) \cdot \eta\, dS$$

dado que las otras dos se demuestran de forma análoga.

Como Ω es de tipo IV, en particular es de tipo I y por tanto se describe como

$$\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \phi_1(x,y) < z < \phi_2(x,y)\}$$

Para ciertas funciones ϕ_1 y $\phi_2 : D \to \mathbb{R}$ y $D \sqsubseteq \mathbb{R}^2$ dominio elemental. Considerando esto se tiene

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial y} dx\, dy\, dz = \iint_{D} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)\, dz\, dx\, dy$$

$$= \iint_{D} \big(F_3(x,y,\phi_2(x,y)\,) - F_3(x,y,\phi_1(x,y)\,)\big)\, dxdy.$$

Ahora se debe calcular la integral sobre el borde de Ω, $\iint_S (0,0,F_3) \cdot \eta dS$. Para ello, se descompone $S = \partial\Omega$ en tres partes, la cara de arriba S_A, la cara de abajo S_a, y la unión de las caras laterales que notamos como S_L. De ahí que:

$$\iint_S (0,0,F_3)\cdot\eta dS = \iint_{S_A} (0,0,F_3\ )\cdot\eta dS + \iint_{S_a} (0,0,F_3\ )\cdot\eta dS + \iint_{S_L} (0,0,F_3\ )\cdot\eta dS$$

Como sobre $S_L$el normal exterior al dominio η tiene la forma $\eta = (*,*,0)$ $dS = 0$. Ahora notemos que la cara de arriba S_A se parametriza como el grafico de ϕ_2 sobre el conjunto D, esto es:

$$\Gamma(x,y) = \big(x,y,\phi_2(x,y)\big),\quad \Gamma\colon D \sqsubset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$$

Ahora bien, como las derivadas parciales de Γ son:

$$\Gamma_x = \left(1,0,\frac{\partial\phi_2}{\partial x}(x,y)\right)\ \text{ y }\ \Gamma_y = \left(0,1,\frac{\partial\phi_2}{\partial y}(x,y)\right),$$

la direccion normal que induce Γ es:

$$\Gamma_x \mathrm{x}\, \Gamma_y(x,y) = \left(-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}(x,y),\frac{\partial\phi_2}{\partial y}(x,y)\right).$$

Se observa que Γ_xx Γ_y

tiene la última coordenada positiva +1, luego apunta hacia arriba. Por consiguiente respeta la orientación de S_A. De ahí que,

$$\iint_{SA}(0,0,F_3)\ \cdot\eta dS = \iint_{D_1}\Big(0,0,F_3\big(x,y,\partial\phi_{2_2}(x,y)\big)\Big)\cdot\left(-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}(x,y),\frac{\partial\phi_2}{\partial y}(x,y),1\right)dx\,dy.$$

$$= \iint_{D_1} \Big(0, 0, F_3\big(x, y, \phi_2(x, y)\big)\Big)\, dx\, dy \qquad *_1.$$

Para calcular la integral de F sobre la cara de de abajo de S, S_a, parametriza:

$$\breve{\Gamma}(x, y) = \big(x, y, \phi_1(x, y)\big), \;\; \breve{\Gamma}: D \sqsubset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;$$

de igual forma, se deben calcular sus derivadas parciales y el vector normal que induce. Como:

$$\breve{\Gamma}_x = \left(1, 0, \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y)\right) \;\; y\; \breve{\Gamma}_y = \left(1, 0, \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, y)\right),$$

se obtiene:

$$\breve{\Gamma}_x \cdot \breve{\Gamma}_y(x, y) = \left(-\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, y), 1\right),$$

se observa que $\breve{\Gamma}_x$x $\breve{\Gamma}_y$ tiene la última coordenada positiva +1, lo que indica que también apunta hacia arriba lo que implica que invierte la orientación de S_a. Muestra que al calcular la integral sobre S_a con esta parametrizacion, se debe cambiar el signo, esto es:

$$\iint (0, 0, F_3) \cdot \eta dS = \iint_{D_1} \Big(0, 0, F_3\big(x, y, \phi_1(x, y)\big)\Big) \cdot \left(-\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, y), 1\right) dx\, dy.$$

$$= \iint_{D_1} F_3(x, y, \phi_1(x, y))dx\, dy \qquad *_2$$

de $*_1$ y $*_2$ se obtiene:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial y} dx\, dy\, dz = \iint_{D_1} \Big(F_3\big(x, y, \phi_2(x, y)\big) - F_3\big(x, y, \phi_1(x, y)\big)\Big)\, dx\, dy$$

$$= \iint_{S} (0,0, F_3) \cdot \eta dS \triangleq.$$

que termina la demostración.

Este teorema se puede usar en cualquier dominio que se escriba como una union finita de dominios de tipo IV, pero se debe considerar el vector normal sobre el borde que siempre debe apuntar hacia afuera, asi como la relación entre la carga eléctrica encerrada en una superficie y el flujo eléctrico a través de la misma superficie cerrada, denominada Ley de Gauss. La función que describe la distribución de Gauss en el campo de las matemáticas, llamada función guassiana, campana de Gauss o curva de Gauss. La distribución de la probabilidad, llamada distribución normal o distribución de Gauss. Y el no menos importante reconocido *método de cuadratura de Gauss*, útil para evaluar integrales definidas de funciones, por medio de sumatorias sencillas y fáciles de implementar. Cabe anotar que este método es una aplicación muy interesante de polinomios ortogonales, por la elaboración que maneja. Para poder comprenderlo necesitamos introducir la *Interpolación de Lagrange*: Consideremos una función continua definida en un intervalo (a, b), y un polinomio cualquiera φn de grado *n*, con *n* raíces simples en el intervalo. La interpolación de Lagrange consiste en encontrar un polinomio de grado $n - 1$ que coincida con la función $f(x)$ dada, precisamente en los ceros de φ_n. Este polinomio de interpolación está dado explícitamente por:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{n,i}\right) \frac{\phi(x)}{\phi'(x_{n,i})(x-x_{n,i})}, \quad [* 1]$$

en que la abscisa $x_{n,i}$ es el cero i–ésimo de φ_n.

Nótese que cada uno de los sumandos en $[* 1]$ es un polinomio de grado $n-1$, pues cada uno de los factores, $\frac{\varphi(x)n}{(x-x_{n,i})}$ es un polinomio de grado $n-1$ dado que $x_{n,i}$ es precisamente una raíz de $\varphi n(x)$. Por otra parte, tenemos ya sea,

$$\lim_{x \to x_{n,k}} \frac{\phi_{n(x)}}{\phi'(x_{n,i})(x-x_{n,i})} = 0, \quad [* 2]$$

si $k \neq i$, ó

$$\lim_{x \to x_{n,k}} \frac{\phi_{n(x)}}{\phi'(x_{n,k})(x-x_{n,k})} = 1, \quad [* 3]$$

donde se ha usado L′Hôpital para evaluar este último límite.

Ahora bien, si se considera el espacio de funciones $L_2([a, b]$, *w(x) dx*), funciones reales de cuadrado integrable en el intervalo [*a*, *b*] con respecto a la función de peso *w(x)*> 0. Llamemos $\{\phi_n\}$, a la familia de polinomios ortogonales (construidos a partir de las potencias 1, *x*, x^2, ..., usando el método de Gramm–Schmidt con el producto interno usual,

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx.$$

Como el polinomio φ_n (de grado *n*) tiene precisamente *n* ceros simples en el intervalo (*a*, *b*), permite llamar $x_{n,i}$, con *i* = *1*, . . ., *n* a estos ceros. Ahora al considerar una función $f(x)$ que sea un polinomio cualquiera, con la condición que sea fijo, de grado $2n - 1$. Llama F(x) a la función que interpola a $f(x)$ a través del polinomio ϕ_n, esto es la función definida a partir de $f(x)$ por $[* 1]$. Ahora nombra:

$$r(x) = \frac{f(x) - F(x)}{\phi_n - (x)} \quad [* 4]$$

de donde es posible notar las siguientes propiedades de $r(x)$:

i. Como la función de interpolación, F(x) coincide con la función original f(x) en cada uno de los ceros del polinomio $\phi_n(x)$ usado en la interpolación, el cuociente $r(x)$ es continuo en el intervalo $[a, b]$, hace que los ceros del denominador se simplifiquen con los del numerador;

ii. Como f(x) es un polinomio de grado $2n - 1$ y por la propiedad anterior i, tanto F(x) de grado $n - 1$ y $\phi_n(x)$ de grado n, permite inferir que $r(x)$ es un polinomio de grado $(2n - 1) - n = n - 1$;

iii. De [∗ 4] se tiene: $\mathrm{f(x) = F(x) + r(x)\phi_n(x)}$ [∗ 5];

Si se multiplica la igualdad [∗ 5] por el peso w(x) y se integra en el intervalo (a, b), se obtiene:

$$\int_a^b f(x)\ w(x)dx = \int_a^b F(x)w(x)dx \quad [*\ 6]$$

Para obtener la igualdad [∗ 6] utiliza que $\int_a^b r(x)\phi_n(x)w(x)\ dx = 0$, obtiene que $r(x)$ sea un polinomio de grado $n-1$, de modo que es posible expresarlo como una combinación lineal de $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ donde todos son ortogonales a ϕ_n. Finalmente, al reemplazar la expresión de F(x) dada en [∗ 1] y en [∗ 6], e intercambiando la suma por la integral se obtiene la igualdad [∗ 7]:

$$\int_a^b f(x)\ w(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n,i} f\left(x_{n,i}\right), \qquad [*\ 7]$$

donde los *pesos* quedan dados por la igualdad:

$$\lambda_{n,i} = \int_a^b \frac{\phi(x)}{\phi'(x_{n,i})(x-x_{n,i})}\ dx. \triangleq$$

Los nuevos métodos tuvieron cada vez más éxito y permitieron resolver con facilidad muchos problemas que antes no había sido posible abordar. Los logros alcanzados se mantuvieron sometidos a severas críticas, la necesidad de justificación ofreció explicaciones lógicas y rigurosas de los procedimientos empleados. Situación que solo vio la luz al final del túnel hasta avanzado el siglo XIX, cuando aparecieron otros matemáticos, preocupados por presentar rigurosamente los métodos que se usaban en la resolución de problemas concretos. Sin embargo, el cálculo ideado por Newton alrededor de 1669 y el de Leibniz alrededor de 1684, y que habían venido siendo desarrollados ampliamente en el siglo XVIII por los Bernouilli, Euler y Lagrange, fue completado en siglo XIX con el trabajo de Dirichlet[64], Cauchy[65] y Weierstrass[66], entre otros, poniendo fundamentos sobre bases firmes. Lo interesante aquí es el interés que existía por el rigor y la buena definición de términos y conceptos que se usaban de manera indistinta, al punto que hubo publicaciones casi simultáneas, relacionadas con la construcción de los números reales por Cantor, Dedekind y Heine, basadas en los conceptos de límite y sucesión; elementos que muestran el interés en dar rigor y una base sólida al cálculo infinitesimal convertido ahora en el nuevo análisis. Mas adelante se mostrará lo clave que fue la construcción de los números reales, convirtiéndose en un paso decisivo hacia la aritmetización del análisis matemático, lo que permitió a Weierstrass dar la definición de límite en términos de estructuras algebraicas y de orden para los números reales. Con ello los conceptos y procesos propios del cálculo quedaron debidamente justificados y adquirieron la presentación definitiva que hoy manejamos.

---

[64] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático alemán al que se le atribuye la definición "formal" moderna de una función (O'CONNOR, 2006).

[65] Augustin Louis Cauchy, matemático francés. Pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyó de manera medular a su desarrollo. Investigó la convergencia y divergencia de series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

[66] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, matemático alemán que se suele citar como el «padre del análisis moderno» (O'CONNOR, 2006).

LOS APORTES DE BOLZANO, CAUCHY Y GREEN

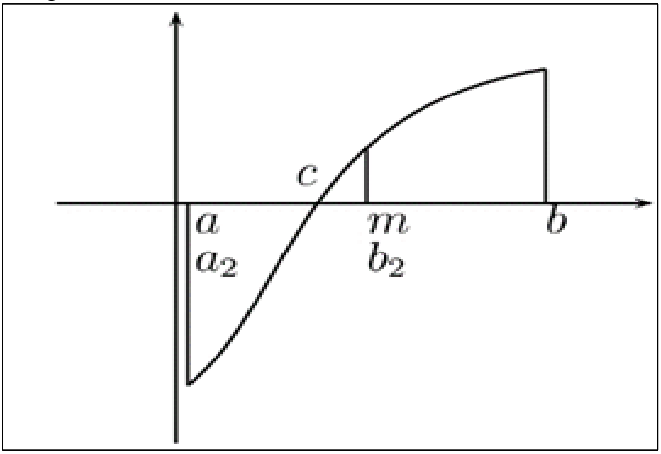
A esta cosecha de logros se suman los aportes de Bolzano cuyo interés se centró en cómo estaban fundamentadas varias ramas de las matemáticas, mencionamos algunas: teoría de funciones, lógica y la noción de cardinal. La búsqueda de precisión llevó a Bolzano a demostrar el teorema del valor intermedio; dio el primer ejemplo de una función continua no derivable sobre el conjunto de los números reales. En lógica, trató la tabla de verdad de una proposición e introdujo la primera definición operativa de deducibilidad. Estudió con anterioridad a Cantor, los conjuntos infinitos. Fue un predecesor del proceso de situar el análisis sobre una base rigurosa, llegando a ser el precursor de la *aritmetización del análisis*. También el primero en encontrar una función continua en todos los puntos de un intervalo, pero no derivable en ninguno de ellos. Ideo el criterio de convergencia de sucesiones y series infinitas al plantear: si para cada p la diferencia $S_n - S_{n+p}$ tiende a 0, cuando n tiende a ∞, entonces la serie converge; resultado atribuido a Cauchy, aunque más tarde este último reconoció que era de autoría de Bolzano y que no habían sido publicados por él. Se dedicó al estudio de las paradojas del infinito, estableció correspondencia biunívoca entre un conjunto infinito y un subconjunto propio suyo, fijó el concepto de distancia, siendo así, uno de los precursores de la teoría de conjuntos y de la lógica moderna, fue de los primeros de separar la lógica de la sicología. Fue el primero en dar una definición precisa de la idea y concepto de límite como soporte para definir la derivada y la integral. En 1817 ofreció una definición de continuidad que para la época resultó ser rigurosa: veamos: una función $f(x)$ es continua en un intervalo I si para toda $x \in I$, la diferencia $f(x+w) - f(x)$ puede hacerse tan pequeña como se quiera tomando w suficientemente pequeña. Se trata de una definición casi semejante a la que usamos actualmente y que fue redescubierta posteriormente por Hermann Hankel. Se resalta que las obras de Bolzano no fueron muy conocidas durante su vida, pues no acostumbraba a publicar resultados, por temor a las mordaces críticas, se limitaba a compartirlas con sus colegas.

Bolzano expuso correctamente todas las ideas necesarias para el desarrollo del cálculo. Admitió la existencia de los números infinitamente grandes e infinitamente pequeños y el axioma del extremo superior, hoy llamado criterio de Cauchy para la convergencia de una sucesión de números reales. Aunque el trabajo de Bolzano fue compartido con sus más allegados circuló poco entre sus contemporáneos y su anuencia fue notoria. El que sí tuvo un beneplácito decisivo fue el Curso de Análisis que Cauchy publicó en 1821, donde retomó el trabajo poco conocido de Bolzano, atacó y definió con precisión el concepto de límite de una función y el de continuidad. Igualmente aclaró los infinitamente pequeños como las variables con limite cero, y los infinitamente grandes como las variables cuyo valor crece indefinidamente, más allá de toda cota y converge a ∞. Bolzano fue el primero en definir:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

indicando que $f'(x)$ no es un cociente de ceros ni la razón entre dos *cantidades evanescentes*, sino un número hacia el que se va aproximando ese cociente. Esto no era sino precisar las ideas de Newton, ya refinadas en el siglo XVIII, entre otros por D'Alembert, que fue el que más se acercó a esa definición. Sin embargo, este trabajo de Bolzano tampoco tuvo difusión amplia.

Figura 33 - Demostración teorema de Bolzano



Fuente: Elaboración propia.

Entre sus trabajos el más notable es el *Teorema de Bolzano* en los siguientes términos: Sea $\mathrm{f}: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe c $\in (a, b)$ de modo que $f(c) = 0$. Para la demostración considera la Figura 33

La condición $f(a)f(b) < 0$ significa que f tiene signos opuestos en los extremos del intervalo $[a, b]$. Supone $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, define $a_1 = a$ y $b_1 = b$. Toma m como punto medio de $[a, b]$. Si $f(m) = 0$ lo que prueba el teorema. Ahora, si $f(m) = 0$, entonces f cambia de signo en alguno de los intervalos $[a, m]$ o $[m, b]$. Supone, $f(a) < 0$ y $f(m) > 0$, pone $a_2 = a_1$ y $b_2 = m$. Procediendo recursivamente, o bien encuentra un cero de f en alguna de las etapas, o bien obtiene una sucesión $[a_n, b_n]$ en las condiciones del principio de encaje de Cantor. En el segundo caso, sea $\{c\}: \bigcap_n [a_n, b_n]$. Entonces tiene $c = lim_n a_n = lim_n b_n$. Como $f(a_n) < 0$ y como $f$es continua tiene que $lim_n f(a_n) = f(c) \leq 0$; como $f(b_n) > 0$ se tiene que $lim_n f(b_n) = f(c) \geq 0$ y de $0 \leq f(c) \leq 0$ para concluir que $f(c) = 0$ $\triangleq$.

Bolzano en 1817 publica un impreso, titulado: *Una demostración puramente analítica de teorema*, en el que afirma que, entre cada dos raíces que garantizan un resultado opuesto existe al menos una raíz real de la ecuación. Por el título, se puede inferir que Bolzano es el primero en intentar obtener una demostración del resultado, sin darlo por «evidente» y esto conjetura, abordar el fondo de muchas cuestiones todavía imprecisas en el cálculo infinitesimal, entre ellas: la noción de limite, de función continua, la recta real como sustrato numérico y sus propiedades, en particular la propiedad del supremo, por nombrar algunas. Lo que se destaca aquí es que los inmensos aportes de Bolzano permanecieron ignorados durante cincuenta años, hasta que, en 1823, Cauchy incluyera este teorema en uno de sus cursos publicados. Cascales *et al*. (2018, p. 111), mencionan que "diversos historiadores han defendido la idea que Cauchy tomó el resultado de Bolzano, esto, es decir, que Cauchy cometió plagio". La discusión sobre este tema sigue abierta, con grandes estudiosos de uno y otro lado.

Otro de los autores que contribuyó en este desarrollo del cálculo infinitesimal fue Agustin Louis Cauchy pionero en el análisis, asignó una definición precisa de función continua, y de la teoría de la permutación de grupos. Trabajó en la convergencia y divergencia de las series infinitas, en ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática. Gracias a sus aportes el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas. Precisó los conceptos de función, limite y continuidad en una forma cercana como la usada hoy. Partió del concepto de limite como concepto originario del análisis, eliminó de la idea de función toda relación con una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. De esta forma los conceptos aritméticos asignaron rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en la intuición geométrica, que, a partir de esta, quedó eliminada, particularmente cuando años después se demostró que hay funciones continuas sin derivadas, esto es, curvas sin tangentes.

En su obra de 1829, en *Leços sur le calcul Différentiél* define por primera vez el concepto de función compleja de variable compleja.

Entre estos resultados inéditos, retomó el concepto tradicional de integral como suma y no como operación inversa. Introdujo rigor en las series fijando criterios de convergencia y eliminó las series divergentes. En matemáticas modernas hay varios términos matemáticos institucionalizados que llevan su nombre, por ejemplo: el teorema integral de Cauchy; en teoría de funciones complejas, el teorema de existencia de Cauchy-Kovalevskaya para la solución de ecuaciones en derivadas parciales, las ecuaciones de Cauchy-Riemann y las sucesiones de Cauchy, esto por nombrar algunos. Algo que llama la atención fue que su vida se desarrolló en un círculo muy cerrado de amistades, lo que conllevó a que no mantuviera buenas relaciones con otros científicos, dado que su fidelidad a la opinión de *L'Académie des Sciences* se lo impedía y por su tozuda integridad hacia si mismo provocada por un fanatismo religioso. En su obra se observan duras críticas al trabajo de Poncelet sobre geometría proyectiva, pero se desconocen las razones científicas de estos hechos. Su trato con Abel y Galois tampoco fue afortunado. En 1832 sostuvo una disputa con Duhamel por la prioridad de un resultado sobre el choque inelástico. Duhamel manifestaba haber sido el primero en encontrarlo, por su parte Cauchy planteaba haber sido el primero. En 1826 Poncelet demostró que ambos estaban equivocados, situación que Cauchy nunca admitió. En general Cauchy produjo 789 escritos, la mayoría de ellos desaprobados por la mayoría de sus colegas, algunos porque no los comprendían, otros por razones desconocidas. Lo que si se destaca es la visión unificadora de sus resultados. Cauchy mostró creatividad no solo en los fundamentos del análisis real y complejo, sino también en la insipiente teoría de grupos de permutaciones que apenas nacía, así como en el desarrollo de la física matemática: mecánica teórica, teorías elasticidad y de la luz. Contribuyó con nuevas técnicas para las transformadas de Fourier, la diagonalización de matrices y el cálculo de residuos.

Presentó la definición de continuidad en los siguientes términos: $f(x)$ es continua en un punto x si un incremento infinitesimal de la variable produce un incremento infinitesimal de la función; esto es, f es continua si y solo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Claude-Alphonse (1868, p. 09) indica que Cauchy dijo de manera imprecisa que, “si una función de varias variables es continua en cada una de ellas, entonces dicha función es continua”, cosa que hoy sabemos no es cierta, ratificando la posición del autor citado. Lo que no se conoce es cómo se dio cuenta y argumentó tal posición. Por otro lado, la que si quedó claro fue la noción de continuidad, esta quedó definitivamente aclarada y separada de la de los valores intermedios. Cauchy retomó y determinó como buena la definición de derivada planteada por Bolzano $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, la desarrolló en su totalidad, eliminando de esta forma problemas relacionados con los diferenciales de Leibniz, *dx* es una cantidad cualquiera y $dy = f'(x)$. Esto es, la diferencial es la función lineal que aproxima a la función dada en el punto considerado. Cauchy distinguió claramente entre dy y Δy, entendiendo este último como la variación de los valores de la función. Para aclararlo obtuvo el teorema del valor medio y el que hoy se denomina *teorema de Cauchy*, que generaliza el anterior y que, realmente le precedió. Como consecuencias, obtuvo la regla de L’Hôpital y las condiciones de extremo relativo. Consiguió la fórmula de Taylor con la expresión *del resto* que hoy lleva su nombre, lo interesante es que la forma de obtenerla es la misma que se usa hoy normalmente. Pero su trabajo fuer más allá, empleó dicha expresión para estudiar la convergencia de las series de Taylor para funciones elementales.

Cabe precisar que, para demostrar el teorema del valor medio, probó de forma intuitiva la compacidad de un intervalo cerrado y acotado, pero sin saber que, si una función tiene derivada positiva en un intervalo, entonces es creciente. A pesar de todo esto, Cauchy creía que una función continua era diferenciable salvo, quizás, en puntos aislados. Sobe este, Bolzano tenía clara la diferencia y en 1834 dio una función continua con derivada no acotada en todos los puntos, trabajo que solo circuló entre sus amistades íntimas, nunca fue publicado por él, por lo que fue poco conocido. Hubo muchos intentos de probar que continuidad implica derivabilidad, y búsqueda de contraejemplos Riemann en 1854, y Weierstrass en 1874, mostraron ejemplos concretos de funciones continuas en todos los puntos y no derivables en ninguno, rebatiendo la idea.

Durante los siglos XVII y XVIII no había una teoría de la integral, ni una definición de tal concepto, ni una caracterización de las funciones integrables. Las ideas usadas eran las de Newton, como operación inversa de la derivación, mientras que las de Leibnitz no se utilizaban. Todo eran conceptos vagos, pero resultados que podrían ser calificados de maravillosos. La necesidad de construir una teoría al respecto apareció con en el desarrollo de los trabajos de Fourier. Cauchy fue quien la adelantó. Para 1823 presentó un tratado de funciones continuas, planteando que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $P = \{a = x < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición del intervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i - 1)(x_i - x_{i-1})$$

aunque la notación no era exactamente ésta. El problema consistía en demostrar que ese límite existe cuando $n \to \infty$, quiere decir, cuando la distancia entre los puntos de la partición tiende a cero. Para probarlo Cauchy utilizó que f fuera uniformemente continua en [a; b] (noción, para él, idéntica a la de continuidad. Lo que le llevó a estudiar la función:

$$x \to F(x) \coloneqq \int_a^x f(x)dx$$

de la que prueba que es continua y derivable y que $F' = f$, y de ahí el teorema fundamental del cálculo, conocido como *teorema de Barrow*. Estudió las integrales impropias de segunda especie, extendió su noción de integrabilidad a funciones continuas a trozos. Con esto se definen ideas geométricas para las que se requiere la integral, ej.: cálculo de áreas planas, longitudes de curvas, volúmenes, etc.; todas restringidas, desde luego, al caso en que el integrando sea una función continua. Para comprender mejor la calidad de su trabajo miremos dos ejemplos de las elaboradas construcciones adelantadas por Cauchy, la primera es la conocida *ecuación de Cauchy-Euler*, que no es más que una ecuación diferencial lineal de la forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x),$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ son constantes. Se observa que los coeficientes:

$$b_n(x) = a_n x^n,\ b_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1}, \cdots, b_1(x) = a_1 x^1,\ b_o(x) = a_o x^o$$

Tienen la característica de ser dependientes de x, esto es, son coeficientes variables. La característica central de esta ecuación es el grado $k = n, n-1, \cdots, 1, 0$ de los coeficientes monomiales x^k que coinciden con el orden k de la derivación:

$$\frac{d^k y}{dx^k}.$$

El segundo es la obra conocida como *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* de 1821. La importancia de esta obra tiene un doble valor: el objetivo de vigorizar conceptos matemáticos, por ejemplo, la noción de límite y continuidad de una función y, particularmente, la estructuración de la teoría de las funciones de variable compleja. Cuyo primer y único volumen publicado se llama *Analyse algébrique*, consta de unos preliminares, doce capítulos y nueve apéndices titulados como notas, sumando un total de 576 páginas. La introducción comienza con las siguientes palabras:

> Algunas personas, que han querido guiar bien mis primeros pasos en la carrera de ciencias, entre los que citaré con reconocimiento a los señores Laplace y Poisson, habiéndome expresado su deseo de verme publicar el Curso de análisis de la Escuela politécnica real, me he decidido a escribir este Curso para mayor utilidad de los alumnos. De él ofrezco aquí la primera parte, conocida bajo el nombre de Análisis algebraico, y en la que trato sucesivamente diversos aspectos de funciones reales o imaginarias, de series convergentes y divergentes, y de la descomposición de fracciones racionales (CAUCHY, 1821, p. i-ij).

De donde es inevitable subrayar que la teoría de los números complejos presentada debía ser interpretada dentro de un contexto más amplio que la simple aritmetización del análisis matemático, proceso en el que Cauchy desarrolló conceptualizaciones y mediadores simbólicos para legar a la humanidad este campo numérico. En el capítulo 7 presenta los números complejos, de forma sistemática incluyendo las operaciones definidas en ellos. Se "destaca una definición central sobre la que descansa toda su interpretación de $\mathbb{C}$, a partir de expresiones simbólicas, donde combina signos algebraicos que no significan nada por sí mismos, sino que tal significado depende de una convención previamente definida" (CAUCHY, 1821, p. 173). Lo que permite inferir que, para él, los números complejos son únicamente números imaginarios, en el sentido que no representan nada real, ni mucho menos un punto en el plano con determinadas coordenadas (x, y), sino que son, en definitiva, una extensión simbólica de carácter algebraico de los números reales carentes de significado. Veamos brevemente cómo presenta la definición de los números imaginarios:

> En general, llamamos expresión imaginaria a cualquier expresión simbólica de la forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α y β denotan dos cantidades reales. Indica que dos expresiones imaginarias de la forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$ son iguales entre sí, cuando haya una igualdad a ambos lados, 1◦ entre las partes reales, 2◦ entre los coeficientes de $\sqrt{-1}$, a saber, β y δ. La igualdad de dos expresiones imaginarias se indica, como en el caso de dos cantidades reales, por el signo =; y el resultado se llama una ecuación imaginaria. Dicho esto, cualquier ecuación imaginaria es la representación simbólica de dos ecuaciones entre cantidades reales. Por ejemplo, la ecuación simbólica $\alpha + \beta\sqrt{-1}$=$\gamma + \delta\sqrt{-1}$ es equivalente a solo dos

> ecuaciones reales: $\alpha = \gamma,$ y $\beta = \delta$ (CAUCHY, 1821, p. 175-176).

Esta expresión simbólica-algebraica de los números reales es fácilmente comprobable en las definiciones de operaciones entre expresiones imaginarias equivalentes a las que usamos actualmente, en su orden:

- $\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right) + \left(\gamma + \delta\sqrt{-1}\right) = \alpha + \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1};$
- $\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right) - \left(\gamma + \delta\sqrt{-1}\right) = \alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1};$
- $\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right) \cdot \left(\gamma + \delta\sqrt{-1}\right) = \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}.$

De manera similar la división entre dos expresiones imaginarias las expresa $\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}$, de manera análoga a como se hace la división entre dos números reales. Para la potencia m de una expresión imaginaria, la denota $\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right)^m$, con $m \in \mathbb{Z}$. Para calcular la raíz n-ésima considera que hay más de una solución, y la denota usando paréntesis dobles: $\left(\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Plantea las expresiones imaginarias como extensiones de los números reales, indicando que son un caso particular de las expresiones imaginarias. En palabras de Cauchy (1821, p. 176) “Cuando, en la expresión imaginaria $\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right)$ el coeficiente β de $\sqrt{-1}$ se desvanece, el término $\beta\sqrt{-1}$ se reduce a cero, y la propia expresión, se reduce, a la cantidad real α”. Esto en matemáticas modernas es equivalente a la expresión $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, al considerar

$$\lim_{\beta \to 0} \beta\sqrt{-1} = 0,$$

entonces,

$$\lim_{\beta \to 0} \left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right) = \alpha.$$

por tanto, el conjunto que hoy denominamos *número real puro* es un subconjunto propio del conjunto formado por las expresiones imaginarias. En notación actual: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \triangleq$.

En el capítulo 7, establece el concepto de módulo de una expresión imaginaria que le permite demostrar varios resultados. Establece la correspondencia $\alpha + \beta\sqrt{-1} \leftrightarrow \rho\left(\cos\theta + \sqrt{-1}\, sen\, \theta\right)$, con $\rho > 0$, y θ un arco (ángulo) real; encuentra que $\alpha = \rho\cos\theta$ y $\beta = \rho\, sen\, \theta$, para construir la expresión:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2(cos^2\theta + sen^2\theta) = \rho^2 \leftrightarrow \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

con $\rho \in \mathbb{R}$, "define de esta forma el *módulo* de la expresión imaginaria $\alpha + \beta\sqrt{-1}$" (CAUCHY, 1821, p. 183).

Inicia el capítulo 8 con una exposición de la teoría de funciones de variable compleja. Define una variable imaginaria como compuesta por dos variables reales de la forma $u + v\sqrt{-1}$, con $u, v \in \mathbb{R}$; si *u, v* convergen, respectivamente, hacia *U, V*, entonces $u + v\sqrt{-1}$ convergerá a la expresión imaginaria $u + v\sqrt{-1}$ (CAUCHY, 1821, p. 240). De este modo, denomina *función* *imaginaria* a la que puede expresarse de la forma $\overline{w}(x) = \phi(x) + \mathcal{X}(x)\sqrt{-1}$, con $\phi(x)$, $\mathcal{X}(x)$ funciones reales de variable real.

Da una definición análoga para el caso de varias variables:

> Del mismo modo, si designamos por $\phi(x, y, z, \cdots)$, $\mathcal{X}(x, y, z, \cdots)$ dos funciones reales de variables reales $x, y, z, \cdots$, $\overline{w}(x, y, z, \cdots) = \phi(x, y, z, \cdots) + \mathcal{X}(x, y, z, \cdots)\sqrt{-1}$ es una función imaginaria de varias variables (CAUCHY, 1821, p. 247).

De esta definición es posible concluir que la estructura de las funciones imaginarias consideradas por Cauchy es la siguiente: Si $\phi, \mathcal{X}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ entonces la función $\overline{w}(x, y, z, \cdots)$ es de la forma $\overline{w}: \mathbb{R}^k \text{x}\, \mathbb{R}^k \to I_{\mathbb{C}}$, siendo $I_{\mathbb{C}} = \left\{a + b\sqrt{-1}: a, b \in \mathbb{R}\right\}$. En este capítulo, realiza un análisis análogo al que ya hizo sobre funciones reales de varias variables, tomando como punto de partida la noción de límite. En la introducción de la obra escribe:

> Al hablar de la continuidad de funciones no podremos pasarnos sin explicar las principales propiedades de las cantidades infinitamente pequeñas, propiedades que servirán como base del cálculo infinitesimal (CAUCHY, 1821, p. i-ij).

Lo que permite inferir y ratificar lo que ya se había mencionado anteriormente, Cauchy elimina de la idea de función toda referencia a una expresión formal algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia, como se maneja hoy en matemáticas modernas. De esta forma se evidencia otra ruptura epistemológica en la evolución del cálculo infinitesimal, dado que ahora los conceptos matemáticos conceden rigor a los fundamentos del análisis, apuntalados hasta entonces en una intuición geométrica que quedará definitivamente eliminada. Para ratificar este campo miremos cómo presenta la definición de variable: “[…] Se llama cantidad variable a aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes unos de otros” (CAUCHY, 1821, p. 04), esclarecimiento que permitió llegar a la definición de límite. En este apartado cabe aclarar que, la notación moderna del límite de una función se remonta a Bolzano en 1817 cuando introdujo las bases de la técnica épsilon-delta; sin embargo, no vio en vida el reconocimiento a su trabajo. Fue Cauchy quien expuso la esencia de la idea, pero no de forma sistemática. La primera presentación rigurosa de la técnica fue publicada por Weierstrass en 1850 quien retomó, reformuló y perfeccionó los trabajos de Bolzano y Cauchy sobre el tema. Desde entonces se ha convertido en el método estándar para trabajar con límites. Pero veamos la definición de limite que Cauchy (1821):

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que se termina por diferir de él tan poco como uno lo quiera, este último valor es llamado el límite de todos los otros (CAUCHY, 1821, p. 04).

En esta definición se observa la unión de dos aspectos entre sí, que es necesario precisar: valores sucesivos atribuidos a una misma variable; y aproximación indefinida a un valor fijo. Uno de los usos que Cauchy hace de esta definición es para conceptualizar el termino infinitésimo:

> Decimos que una cantidad variable se hace infinitamente pequeña, cuando su valor numérico [i.e., su valor absoluto] decrece indefinidamente de

> manera que converge al límite cero (CAUCHY, 1821, p. 26).

La definición matemática actual usa la forma lógica de equivalencia "sí y sólo sí". La descripción anterior de Cauchy de una cantidad variable como infinitesimal, tiene la forma lógica de una implicación o condicional lógico:

> […] si el valor absoluto de una cantidad variable decrece de tal manera que es menor que cualquier número positivo dado entonces la cantidad variable es un infinitesimal. ¿Si designamos una cantidad variable como infinitesimal, entonces el conjunto de sus valores absolutos decrece de tal manera que es menor que cualquier número positivo dado? es decir una variable cuyo valor numérico decrece indefinidamente […] (CAUCHY, 1821, p. 27).

Por tanto, una cantidad variable es un infinitesimal, sí y sólo sí su valor numérico decrece indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero. De esta manera Cauchy precisa lo que debe entenderse por un decrecimiento constante y un decrecimiento indefinido:

> La superficie de un polígono regular circunscrito a un círculo dado decrece constantemente, a medida que el número de sus lados aumente, pero no indefinidamente, puesto que ello tiene por límite la superficie del círculo. De la misma manera, una variable, que admite por valores sucesivos solamente los diferentes términos de la sucesión: 2/1,3/2,4/3,5/4,6/5…, decrece constantemente, pero no indefinidamente, puesto que sus valores sucesivos

> convergen hacia el límite 1. …. una variable, que asume por valores sucesivos los diferentes términos de la sucesión: 1/4,1/3,1/6,1/5,1/8,1/7…, no decrece constantemente, porque la diferencia entre dos términos consecutivos de esta sucesión es alternadamente positiva y negativa; … ella decrece indefinidamente, porque su valor terminará por estar debajo de todo número dado (CAUCHY, 1821, p. 27).

En su concepción de límite de una variable se diferencian dos niveles de significación: uno geométrico y otro de carácter topológico. Al representarlos geométricamente, la sucesión de valores que asume la variable, en una recta dirigida por puntos que tienen por coordenadas los valores de dicha sucesión, se acumularán en torno de un punto fijo que tiene por coordenada el valor fijo, límite de la variable. El punto fijo en topología es llamado ‘‘punto de acumulación” (RUDIN, 1966, p. 40). El segundo nivel, analítico, caracterizado por el conjunto de valores absolutos de las diferencias entre los valores que asume la variable y el valor fijo, límite de la variable, representa un proceso de decrecimiento indefinido. Interpretamos, coincidiendo con Tall y Katz (2014), que la definición de límite de Cauchy describe un proceso, pero dicho proceso es de variación de cantidades dadas por una sucesión, y dirigido a un valor fijo finito o un valor infinito.

Las definiciones de límite e infinitésimo plantean interrogantes a considerar para una caracterización del análisis matemático de Cauchy. En matemáticas modernas la palabra variable designa un símbolo; así, por ejemplo, la variable *x* no es más que un símbolo que representa, indistintamente, un valor arbitrario de entre una cierta colección de valores, pero no representa una cantidad variable, porque tal cantidad no existe (GRATTAN-GUINNESS, 1997, p. 110). Pero esta acepción se introdujo como consecuencia del estudio de los fundamentos de las matemáticas, de modo que los textos matemáticos anteriores eran, con frecuencia, muy poco claros al respecto, siendo la definición de infinitésimo de Cauchy un buen ejemplo. Por otro lado, se supo que las funciones diferenciables son continuas y que las funciones continuas son integrables, aunque los recíprocos son falsos. Situaciones que conllevaron a la aparición de nuevas nociones de integral y teorías asociadas como superficies integrales en espacios tridimensionales, integrales de formas diferenciales que juegan un papel fundamental en la geometría diferencial.

Cauchy adoptó métodos rigurosos, que hoy día son reconocidos y seguidos en las matemáticas superiores, entre ellos: el teorema integral de Cauchy, las condiciones de Cauchy-Riemann o las sucesiones de Cauchy. Se destaca que, a través de los conceptos de límite, función y convergencia, se logró posicionar una definición analítica de integral definida para funciones continuas; también propuso la notación actual para este tipo de integrales, sustituyendo la engorrosa notación de Fourier $\int f(x)dx \begin{bmatrix} x = b \\ x = a \end{bmatrix}$ por $\int_a^b f(x)dx.$ Formalizó propiedades para la integral, expresadas con la nueva notación, como:

1) $\int_x^{x_0} f(x)dx = -\int_{x_0}^{x} f(x)dx;$

2) $\int_x^{x_0}(f + ig)(x)\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + i\int_{x_0}^{x} g(x)dx;$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Con este trabajo se observa otra ruptura epistemológica, Cauchy separa definitivamente la integral del cálculo diferencial, mediante una primera demostración rigurosa, sobre la relación inversa de la derivada y la integral, a través del teorema fundamental del cálculo en su primera versión histórica, definiéndola como un límite de sumas. Estas generalizaciones surgieron de las necesidades de las ciencias naturales y juegan un papel básico en la formulación de muchas leyes físicas con especial relevancia en electrodinámica; esto se notó posteriormente con los teoremas de Green y de Stokes y con el concepto abstracto de *Integral de Lebesgue*. Aspectos que más adelante se mostraran.

Por otro lado, encontramos otro matemático que aportó en la búsqueda de esa rigurosidad matemática tan anhelada siglos atrás. A Dirichlet[67] se le atribuye la definición «*formal*» moderna de *función*. Su definición de función liberó el término de su interpretación usual como un tipo de *fórmula*. En los años previos a la época de Dirichlet, el término *función* generalmente era entendida como referido a entidades algebraicas tales como $f(x) = x^2 + 1$ o $g(x) = \sqrt{x^4 + 4}$. Su definición de 1830 permitió una gama mucho más amplia de posibilidades, la expresó en los siguientes términos:

> Dados dos conjuntos A y B, una *función* de A a B es una regla o asignación que toma cada elemento $x \in A$ y le asocia un único elemento de B. En este caso, escribimos $f: A \to B$. Teniendo en cuenta un elemento $x \in A$, la expresión $f(x)$ se utiliza para representar al elemento de B asociado con x por f. El conjunto A se llama el *dominio* de f. El *rango* de f no es necesariamente igual a B, sino que se refiere al subconjunto de B dado por $\{y \in B: y = f(x)\}$ para un $x \in A$ (WEISSTEIN, 1999, p. 35).

[67] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemán.

Trabajo que permite ubicarlo como uno de los líderes en el desarrollo del enfoque riguroso de las funciones, su principal motivación fue extraer argumentos relacionadas con la convergencia y el desarrollo de las series de Fourier. Reflexionó sobre la función característica de los racionales, sobre la relación de exigencia que deben cumplir los infinitos puntos de discontinuidad para que una función fuese integrable; estableció la falsa condición que es suficiente que los puntos de discontinuidad formen un conjunto diseminado para que la función sea integrable. Lo que lo lleva a concentrase en la conocida *función de Dirichlet*, se trata de una función muy especial en matemáticas, su particularidad está en no ser continua en ningún punto de su dominio. La esboza de la siguiente forma: si c y d son dos números reales (usualmente se toman los valores $c = 1$ y $d = 0$), la función de Dirichlet define como $D(c) = 1$ si c es racional y $D(d) = 0$ sí d es irracional. Como tanto los raciónales como irracionales son densos, entonces la función no es continua. Denotada:

$$D(x) = \begin{cases} c \;\; para\ x\ racional \\ d\ para\ x\ irracional \end{cases}$$

analíticamente, la representa de la siguiente manera:

$$D(x) = \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{j\to\infty}\left(\cos(k!\,\pi x)^{2j}\right)\right),$$

esta función no es continua en ningún punto de su dominio dado que si k es suficientemente grande y $x \in \mathbb{Q}$, el coseno queda evaluado en un múltiplo par de π, por lo que toma el valor 1, y el j no importa. El coseno toma valores entre $(-1, 1)$, al evaluarlo en $2j$ el limite vale

0. La razón de usar $2j$ en lugar de j es para que el primer limite exista, aunque el segundo valga -1.

Farfán y García (2006, p. 493) plantean que formalmente en la noción general de función introducida por Dirichlet, basta observar lo que Spivak (1981), escribe a este respecto:

> El concepto más importante de las matemáticas es el concepto de función. En casi todas las ramas de la matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con una gran generalidad (SPIVAK, 1981, p. 47).

Al respecto Dieudonné (1978a) planteó que, en los libros clásicos de matemáticas para finales del siglo XX, se observa cómo se intenta favorecer más la relación que guarda este concepto con el intento por describir fenómenos naturales, de tal manera que "en la actualidad se prefiere considerar el concepto de función como aplicación" (p. 187). Es evidente que la noción primitiva de función era más intuitiva, contrastada con la actual que tiene un alto grado de formalización, lo que la hace más abstracta. O como Freudenthal (1983, p. 497) menciona: "aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático".

Al concluir el siglo se tenía claro que había que imponer un cierto orden a las demostraciones hasta entonces basadas en métodos y consideraciones geométricas y físicas. Acción que se logró imponiendo orden, lo que permitió desarrollar varias ramas de las matemáticas. Hasta ahora se ha mostrado que los aportes más célebres en cálculo infinitesimal fueron a cargo de: Cauchy, Weierstrass, Bolzano, Abel, Riemann y Dirichlet. Pero es de resaltar que con los aportes de Dirichlet quedaron superadas las demostraciones que hasta entonces solo eran una mezcla de pruebas formales, simples generalizaciones de experiencias concretas que basaban el rigor en la comprobación experimental a posteriori de los resultados obtenidos. Todo esto quedó arrasado por dos razones: la primera, porque critica a la geometría como modelo de rigor, reemplazándola por la aritmética como soporte del nuevo análisis; cuyo resultado fue una *aritmetización* de las matemáticas. En segundo lugar, porque se dio un genuino abanico opciones tanto de nuevas ramas de las matemáticas, así como en la formalización de las mismas. Lo que permite ubicar el desarrollo del cálculo en lo que hoy se conoce como matemáticas modernas, compuestas por: análisis matemático, análisis funcional, análisis complejo, variable compleja, geometría proyectiva, topología, topología algebraica, por nombrar algunas. Por otra parte, esta necesidad de vigorización hizo que las matemáticas dejaran de ser, en parte, una idealización de la naturaleza; y pasaran a ser consideradas como una creación del ser humano. Cuyo objetivo primordial ya no era la descripción de la naturaleza, sino el estudio de entes matemáticos, que pasan a tener existencia independiente y en igualdad con los demás objetos que conforman la realidad. De esta forma las matemáticas dejaron de ser creaciones arbitrarias de la mente, para pasar a ser objetos reales que hay que descubrir, estudiar y formalizar.

Dentro del desarrollo y formalización lograda por el cálculo infinitesimal conocido hasta entonces como el nuevo análisis, aparece la obra de George Green al publicar su primer trabajo titulado "*Ensayo sobre la aplicación del análisis matemático a las teorías de la electricidad y el magnetismo*" (*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*), fue bien recibido por la comunidad científica que reconoció a Green como un matemático destacado. En esta obra expresa tres posibles formas de extender el teorema fundamental del cálculo en un intervalo dado, indica que los teoremas integrales tienen multitud de aplicaciones a la física y a las ecuaciones diferenciales. Este teorema proporciona la relación que existe entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple C y una integral doble sobre la región plana D encerrada por C, trabajo similar al teorema de Gauss, demostrado anteriormente aquí; veamos el teorema al detalle.

El teorema de Green plantea: sea $\mathrm{F} = (\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ un campo vectorial de clase C_1 definido en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ y sea una curva en el plano, cerrada, simple, orientada positivamente y diferenciable por trozos, que encierra una región D de tipo III que queda contenida en Ω. Entonces:

$$\int_{C^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy. \; *$$

presenta una demostración en los siguientes términos

$$\int_{C^+} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{C^+} P\,dx + \int_{C^+} Q\,dy$$

y

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dx\,dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dx\,dy.$$

Luego, la igualdad marcada con * del párrafo anterior queda probada si se observa que:

$$\int_{C^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy$$

y que:

$$\int_{C^+} Q\,dy \;= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dx\,dy.$$

Ahora plantea dos lemas, veamos:

Lema 1: Sea D una región de tipo I en el plano y, sea C^{+} la curva diferenciable por trozos que recorre su frontera orientada positivamente. Entonces, si $\mathrm{P}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^1se tiene:

$$\int_{C^+} (P,0)\,d\sigma = \int_{C^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dx\,dy.$$

La demostración que ofrece esta en los siguientes términos: Calcula la integral en la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; a_1 < x < a_2,$ $\varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$. Entonces, por el teorema de Fubini, se tiene que:

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dx\,dy = -\int_{a_1}^{a_2}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dydx$$

$$= -\int_{a_1}^{a_2} P(x, \partial_2(x))dx - \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_1(x)) \; [*a]$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_1(x))\, dx - \int_{a_1}^{a_2} P\big(x, \varphi_2(x)\big)\, dx.$$

Ahora calcula la integral sobre la curva C^+. Considera la descomposición de la curva C^+ que se describió en la parte inicial de la demostración y la reescribe como $C^+ = C^{\,+}_{\,1} \cup C^{\,-}_{\,2} \cup B^{\,-}_{\,1} \sqcup B^{\,+}_{\,2}$. De esto obtiene:

$$\int_{C^+} P\, dx = \int_{C_1^+} P\, dx + \int_{C_2^-} P\, dx + \int_{B_1^-} P\, dx + \int_{B_2^+} P\, dx$$

luego calcula cada una de las cuatro integrales. La primera, parametrizando $C^{\,+}_{\,1}$ según $\sigma_1(t) = (t, \varphi_1(t)),\ t \in (a_1, a_2)$. Observa que esta parametrización respeta la orientación, esto es, recorre la curva de izquierda a derecha y además $\varphi'_{\,1}(t) = \big(1, \varphi'_{\,1}(t)\big)$. De donde obtiene:

$$\int_{C_1^+} P\, dx = \int_{C_1^+} (P, 0)\, d\sigma = \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_1(t))\, dt.$$

Para la segunda integral parametriza $C^{\,-}_{\,2}$ según $\varphi_2(t) = (t, \varphi_2(t)),\ t \in (a_1, a_2)$. Observa que esta parametrización recorre la curva de izquierda a derecha y por la orientacion que hereda $C^{\,-}_{\,2}$ de la prientacion positiva de C^+se debe recorrer de derecha a izquierda. Como es sabido, para invertir la orientación se agrega el signo menos antes de la integral. También considera que $\varphi'_2(t) = (1, \varphi'_2(t))$, para obtener:

$$\int_{C_2^-} P\, dx = \int_{C_2^-} (P, 0)\, d\sigma = -\int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_2(t))dt.$$

para B^-_1, en caso que aparezca este trozo en la curva, considera la parametrización:

$$\varphi_3(t) = (a_1, t), \qquad t \in (\varphi_1(a_1), \varphi(a_2)),$$

que tiene como vector tangente a $\varphi'_3(t) = (0, 1)$. De donde:

$$\langle P(\varphi_3(t), 0);\ \varphi'_3(t)\rangle = \langle P(\varphi_3(t), 0);\ (0,1)\rangle = 0,$$

de donde se logra:

$$\int_{B_1^-} P\, dx = 0.$$

Con un razonamiento análogo obtiene:

$$\int_{B_2^+} P\,dx \; = 0.$$

Al reunir las cuatro integrales de linea, obtiene:

$$\int_{C^+} P\,dx = \int_{C_1^+} P\,dx \; + \int_{C_2^-} P\,dx + \int_{B_1^-} P\,dx + \int_{B_2^+} P\,dx$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_1(t))\,dt - \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_2(t))\,dt + 0 + 0,$$

Cuyo rsultado es igual a $[* \, a]$, lo que permite concluir que

$$\int_{C^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx\,dy,$$

que era lo que se quería demostrar. La demostración del segundo lema es similar, considerando que el signo menos no aparece en el enunciado, este trabajo no lo presentamos aquí, porque se considera repetitivo, solamente se enuncia el lema a continuación:

Lema 2: Sea D una región tipo II en el plano, sea C^+ la curva diferenciable por trozos que recorre su frontera orientada positivamente. Entonces, si $\mathrm{Q}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^1se tiene

$$\int_{C^+} (0, Q)\, d\sigma = \int_{C^+} Q\, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx\, dy.$$

Ahora bien, la combiacion de estos dos lemas termina la demostracion del teorema de Green. Este teorema resulta útil para encontrar una fórmula que permite calcular el área de una región a partir de una integral sobre su borde.

A esta altura el proceso de desarrollo y formalización del cálculo evidencia tres sistemas usados: el Leibniziano, o de las infinitesimales; el Newtoniano, o de los límites; y el de Lagrange, o de las derivadas algebraicas. Los tres giran en torno a la búsqueda de una fundamentación rigurosa, entre los que se destaca la Teoría de Lagrange por eliminar los infinitesimales, así como por su carácter marcadamente algebraico, una herramienta básica empleada fue el desarrollo en series de potencias de las funciones. Situación que motivó la aparición de otras obras cuyos autores adoptaron la propuesta lagrangiana, prácticamente a lo largo de todo el siglo XIX; a pesar que, a partir de la segunda mitad del mismo, ya eran conocidos los trabajos de Cauchy y Weierstrass. Lo importante de resaltar es que, durante este siglo, se concentra en París un ambiente intelectual de matemáticos franceses como nunca antes se había visto, entre ellos: Arbogast, Carnot, Cauchy, Condorcet, Fourier, Lagrange, Legendre y Poncelet que influenciaron el desarrollo en la fundamentación del cálculo en toda Europa, así como Bolzano y Cauchy basados en cantidades finitas, las obras de Gauss en Alemania y Green en Inglaterra.

Para la mitad del siglo un escritor francés de libros de texto matemático, cuyo nombre era Boucharlat, manifestó intranquilidad al estar tomando elementos de cada una de las tres propuestas manifiestas en el párrafo anterior: los infinitesimales de Leibniz, los límites de Newton, y la algebraica de Lagrange, con la finalidad de poder conformar un contenido más accesible a los estudiantes, al respecto manifestó:

> El método de los infinitamente pequeños, no es sino un medio expedito de encontrar los diferenciales de diversas funciones, él grava sus diferenciales en nuestra memoria mediante figuras geométricas reducidas al último grado de simplicidad, y que hablan más a la imaginación que las ideas abstractas; en fin, este método deviene indispensable en las partes altas de la mecánica y la astronomía, en donde, sin él, la resolución de los problemas tendría una extrema dificultad.
>
> Si el método de los límites complementa al de los infinitamente pequeños, rectificando aquello poco que este último podía tener defectuoso, el método de Lagrange complementa a su vez al de los límites, haciendo depender los coeficientes diferenciales de la pura Álgebra. Se puede entonces considerar entonces a estos tres métodos como formando uno solo (BOUCHARLAT, 1858, p. 06-07).

Lo que permite inferir que, para los autores de libros usados para la enseñanza del cálculo, en el siglo XIX, resultó significativo el aspecto didáctico. Se pretendió tomar elementos positivos de cada una de estas vertientes con el objeto de lograr textos que resultaran accesible para quienes se iniciaban en el estudio de esta ciencia, y, al mismo tiempo, para tratar de corregir las deficiencias que, desde el punto de vista del rigor, pudiera tener alguna de ellas. Se observa que en el Análisis algebraico Cauchy no hace ninguna referencia a la física matemática, a pesar de que él mismo la cultivó con dedicación, ya no parece interesarse en el conocimiento del mundo sensible ni en las aplicaciones de la ciencia matemática. Si bien su trabajo no es el primer texto de matemáticas puras, su obra es tal vez la primera, en análisis, que, por sus objetivos, no intenta ninguna justificación ajena a las relaciones intrínsecamente matemáticas; a diferencia de Lagrange, quien, a pesar de haber hecho una presentación de los conceptos de su teoría de manera descontextualizada, dedicó, el resto de su obra a las aplicaciones geométricas y mecánicas; de la obra de Cauchy se destaca su escaso interés en aplicación alguna. Lo que permite inferir que, por fin al Análisis, había sido "liberado" de sus aplicaciones. Se destaca lo que muestra la historia, el principal impulsor de la propuesta de Cauchy fue Weierstrass, de manera que, actualmente, se habla del *modelo de Cauchy-Weierstrass* para hacer referencia a esta propuesta, que es, con pequeños cambios, la que se enseña actualmente. Al respecto Russell en 1915, manifiesta:

> El Cálculo requería continuidad, y la continuidad, se pensaba, requería a su vez de lo infinitamente pequeño. Lo cual no era evidentemente igual a cero, pues sumando un número lo bastante grande de infinitesimales hacían un todo finito. Pero nadie podía descubrir una fracción que fuera distinta de cero y además no finita. Era pues un círculo vicioso. Pero al fin Weierstrass descubrió que no se necesitaba en absoluto lo infinitesimal y que todo podía hacerse sin él. Por consiguiente, no hubo ya necesidad de suponer por más tiempo que tal cosa existía (RUSSELL, 1915, p. 373).

CAPÍTULO 5

Consolidación de las Matemáticas Modernas Como Evolución del Cálculo Infinitesimal

CONSOLIDACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS MODERNAS COMO EVOLUCIÓN DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

A principios del siglo XIX se dieron tres circunstancias consideradas fundamentales: existía un álgebra de desigualdades bien desarrollada, donde el rigor era considerado importante y se darían cuenta que los conceptos relacionados con la convergencia, límites, series, derivadas, integrales, debían ser precisos. Al menos se presentaron tres situaciones que favorecieron la rigorización del Cálculo: la primera de índole filosófica: pretensiones de refutar los ataques de matemáticos como los hechos por Berkeley, y de las que la fundamentación geométrica de Maclaurin tuvo el objeto de contestarlos; la segunda, existía la percepción que había un límite al número de resultados que podían ser atacados con las técnicas del Cálculo y por último, la conveniencia de no seguir avanzando y consolidar los logros obtenidos. Los trabajos de Lagrange que proporcionaron una base puramente algebraica al Cálculo, afirman que había que liberarlo de la idea extraña del movimiento y, dada la inconsistencia del concepto de infinito, se preguntaba cómo tantos resultados correctos pueden derivarse de una noción inconsistente. Lagrange en su *Théorie des fonctions analytiques* trató de asentar el Cálculo en la noción de series de potencias, convergentes o no; intento condenado al fracaso, pero que produjo nociones como la *función derivada* y resultados como la expresión para el término complementario en el desarrollo de Taylor que quedarían tal cual como las trabajó. Por último, la necesidad de muchos matemáticos prominentes de enseñar a grupos cada vez más numerosos de alumnos en las nuevas instituciones surgidas de la Revolución Francesa que estimó, la creación de cuerpos de científicos e ingenieros, como útiles al estado moderno. Dicha necesidad generó la escritura de libros de texto para estas instituciones. Se destacan los trabajos de Cauchy, Lacroix, Charles Sturm, Jean-Marie-Constant

Duhamel, que obligaron a repensar y estructurar el Cálculo: el establecimiento de las academias militares y la *école Polytechnique* en 1795 creó una forma de explicar Matemáticas que llegó a convertirse en modelo de la educación universitaria y que trasformó la manera de enseñar matemáticas a nivel superior.

Es de aclarar que el interés de Cauchy no era la enseñanza de novicios, sino la investigación científica para lo que su obra deriva en una reformulación eficaz del Análisis al iniciar la eliminación del pensamiento algorítmico y su substitución por el pensamiento conceptual, iniciando, así, la transformación del Análisis algebraico, en el sentido de Euler y Lagrange, al Análisis aritmético, en el sentido de Weierstrass. Situación que llevó a que su trabajo fuera poco entendido y con alguna dificultad estudiado, incluso hasta por sus propios colegas. Muchas ideas significativas contenidas en su trabajo serían redescubiertas y validadas más adelante. Dado el poco éxito entre alumnos y colegas, de las obras antes mencionadas, el propio Cauchy publicó versiones más asequibles entre 1829 y 1833. Tanto el libro de Lacroix como los que seguirían a los de Cauchy en las instituciones francesas evitaron el estilo conceptual de Cauchy, aunque no sus resultados sobre series convergentes: por ejemplo, la continuidad sería descrita más que definida; la integración sería vista como la anti diferenciación. La necesidad de basar todos los métodos y resultados conseguidos en definiciones claras como: la noción de convergencia, continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad y pruebas rigurosas, llevó a Cauchy a una primera etapa de rigorización de la disciplina. Expresiones como “una variable que se aproxima a un valor fijo” y la visualización de los números reales como puntos de una recta aparezcan excesivamente. Indica que el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, en esta etapa, fue presentado en términos de matemática infinitesimal y no en lenguaje de épsilon-delta, sólo utilizado por Cauchy verbalmente y que probablemente fue la causa de algunos resultados incorrectos que obtuvo.

Estas llamadas a la percepción geométrica, además de la estigma que sufría la visualización de conceptos fundamentales como continuidad y diferenciabilidad harían necesaria otra etapa de “rigorización”, esta vez liderada por Weierstrass y Dedekind, que tendría las auténticas características de una revolución, eliminando el contenido geométrico-intuitivo de los razonamientos analíticos, al basarlos en una estructura aritmética: primero en los números reales por Dedekind y, posteriormente, en los números naturales con Cantor; estructura que estaría delimitada por unos pocos axiomas, los de Peano, que esencialmente son un conjunto de entidades generadas a partir del cero por aplicación reiterada de la operación “sucesor”. La axiomatización de Peano, a su vez, abrió el camino a la teoría de funciones recursivas, la teoría de los algoritmos y de la computación, entendida en sentido moderno. La construcción del continuo a partir de los naturales demandaría la introducción de nuevos entes matemáticos: los conjuntos infinitos. Además, la aritmetización del Análisis permitió la consolidación de la Matemática Pura como disciplina practicada por un grupo específico de profesionales, creándose unos requerimientos especiales de formación para ganar aceptación dentro de este grupo.

Estas etapas de rigorización difieren en la explicación de la noción de infinito que subyacía en sus construcciones. Mientras Cauchy se sustentó en la noción de infinito potencial, Weierstrass se basó en la noción de infinito actual y eliminó los infinitesimales del Análisis. En un primer paso, el soporte natural de la teoría, el continuo de los números reales, debía ser rigorizado. Puesto que, en la historia del Análisis, desde Leibniz hasta Weierstrass, existían dos teorías rivales del continuo. Por un lado, la teoría Weierstrassiana hoy día aceptada y, por otro, la teoría Leibniziana, basada en el continuo arquimediano extendido al no arquimediano producto de añadir los infinitesimales e infinitamente grandes. Esta segunda teoría fue la dominante hasta la revolución de Weierstrass y Cauchy se movió plenamente en esta tradición. Esta revolución consistió en poder explicar satisfactoriamente el Análisis conocido en términos de los números reales tal como los definió Weierstrass y buscar desarrollarlo más allá, eliminando del Análisis todas las magnitudes variables, todo cambio, movimiento y reduciéndolo todo a estados estacionarios, es decir, a magnitudes constantes, presentes en los aportes de Lusin a inicios del siglo XX. Observemos que un real para Cauchy era una variable que podía correr a través de los reales de Weierstrass, los infinitesimales y todos aquellos números que diferían de los reales de Weierstrass en números infinitamente grandes o infinitesimales.

En términos de Lakatos (1978) las variables de Cauchy eran sucesiones de reales de Weierstrass; sus números infinitamente grandes eran sucesiones no acotadas y sus infinitésimos eran sucesiones que convergían a cero. Aunque Cauchy no menciona explícitamente la noción de sucesión, la idea está implícita, pues una de las dificultades pedagógicas en la exhibición del Análisis es que, para la mayoría de alumnos, la visión del continuo que poseen está más próxima a Cauchy que a Weierstrass. Weierstrass construyó los números reales a partir de los racionales mediante la introducción de una algebraización satisfactoria de la noción de convergencia y la admisión del infinito actual de Cantor al considerar conjuntos infinitos de racionales positivos con sumas parciales acotadas para construir reales. Situaciones que permiten inferir evolución de conceptos y resultados clásicos que a lo largo de los siglos habían existido y la forma habitual de presentarlos no era genética, sino a través de la visión filosófica del momento: para nuestro caso, a través de una rígida jerarquía de secuencias lógicas que establecen demostraciones formales de hechos más generales que los que inicialmente se estudiaron y que son el producto de una sistematización muy posterior al momento de su descubrimiento. Las actividades primordiales del pensamiento matemático avanzado, la formulación de conjeturas, el alumbramiento de pruebas o refutaciones convincentes y el uso constante de diagramas, está ausente de la presentación docente: actualmente se presenta un producto acabado donde todo está en calma y en certidumbre y las pruebas se desarrollan a lo largo de las líneas deductivas tradicionales. Aspecto conocido como proceso formal mecanicista.

LOS APORTES DE EVARISTE GALOIS, ABEL, WEIERSTRASS Y STOKES

Evariste Galois introdujo el concepto de Grupo, necesario para encontrar una formulación más general y menos engorrosa que la que proporcionaba el teorema para identificar las ecuaciones de grado 5 y superiores resolubles mediante radicales. Definió los axiomas de Grupo dentro de su trabajo relativo a resolución de ecuaciones polinómicas. Es decir que, para conseguir un objetivo concreto como determinar la resolubilidad mediante radicales de una ecuación polinómica, le fue necesario crear toda una estructura algebraica de enorme aplicación en ramas de la matemática que no tienen nada que ver con el origen de su estudio. Enunció y demostró un teorema, *teoría de Galois*, para identificar dichas ecuaciones; precisó cuándo una ecuación polinomial es soluble por medio de radicales ya que todo polinomio tiene asociado un grupo, conocido como *grupo de Galois* del polinomio o de la ecuación polinomial correspondiente. Una ecuación polinomial es soluble por medio de radicales si y solamente si su grupo de Galois es soluble.

El *Teorema fundamental de la teoría de Galois* establece un anti-isomorfismo de retículos entre el de subgrupos de un grupo de automorfismos de un cuerpo, el de subextensión está formada por este cuerpo y el subcuerpo fijo de dicho grupo. El teorema explica la conexión entre los subgrupos de G(E/F) y los cuerpos intermedios entre E y F. Esta biyección es usada sistemáticamente para la obtención del Teorema de Galois sobre la resolubilidad por radicales de una ecuación algebraica $f(x) = 0$. Esta resolubilidad queda establecida en términos de las propiedades algebraicas del grupo de automorfismos del cuerpo de escisión de f sobre su cuerpo de coeficientes. Finalmente demostró, casi simultáneamente con Abel, la imposibilidad de encontrar una solución general a estas ecuaciones utilizando únicamente suma, resta, multiplicación, división, exponenciación y radicación de los coeficientes, esto fue mediante radicales; llegó a la conclusión que estas ecuaciones solo pueden resolverse de forma aproximada usando técnicas de cálculo numérico. Sin embargo, existen muchas ecuaciones, casos particulares de grado 5 y superiores perfectamente resolubles mediante radicales. En términos generales los aportes de Galois a las matemáticas no son sencillas de entender por su complejidad, incluso para los tiempos actuales. Tampoco fue completamente comprendida por los matemáticos de su época, algunos sencillamente la ignoraron, y solo hasta finales del siglo XIX se descubrió su profundidad y alcance. Su trabajo está centrado fundamentalmente en el campo del álgebra, rama a la que dio un impulso definitivo. Sus investigaciones dieron lugar a la llamada Teoría de Grupos y Cuerpos de Galois. Actualmente las estructuras algebraicas llamadas Grupos de Galois son usadas en Criptografía, informática y telecomunicaciones.

Paolo Ruffini fue el primero en tratar de probar que la ecuación general de grado 5 o mayor no se puede resolver por medio de radicales, basado en los métodos de Lagrange consideró funciones racionales de las raíces de una ecuación general de grado n. Si m es el número de permutaciones que dejan tal función inalterada, m es un divisor de $n!$, y el número de valores diferentes que toma la función, si se permutan las raíces, es $\frac{n!}{m}$. Lagrange había probado que tal función es raíz de una ecuación de grado $\frac{n!}{m}$. Ruffini mostró que en el caso de la quíntica $\frac{5!}{m}$ puede ser 2 o 5, pero no 3 o

4, lo que significa que una resolvente en el sentido de Lagrange que satisfaga una ecuación de grado 3 o 4 es imposible. Su demostración no era totalmente correcta pues faltaba justificar que los radicales se pudieran expresar como funciones racionales de raíces de la ecuación. Se conoce como Regla de Ruffini a la división sintética para dividir un polinomio entre un monomio de la forma $x - a$.

Abel[68] probó que no hay ninguna fórmula para hallar las raíces de todos los polinomios generales de grados $n \geq 5$ en términos de sus coeficientes, demostró que no existe una solución algebraica general para las raíces de una ecuación quíntica, o cualquier ecuación polinómica general de grado superior a cuatro, en términos de operaciones algebraicas explícitas. En las funciones elípticas, desarrolló un método general para la construcción de funciones periódicas recíprocas de la integral elíptica (ABEL, 1824). Para ello, inventó, independientemente de Galois, una rama de las matemáticas conocida como *teoría de grupos*, que tiene un valor incalculable no sólo en muchas áreas de las matemáticas, sino también para gran parte de la física.

Abel (1823) expuso un teorema que se refiere a la extensión del teorema de adición de Euler para integrales elípticas, al caso de integrales de funciones racionales $R(x, y(x))$ de variables x, y de cualquier función algebraica $Y(x)$. El teorema enuncia: *cualquier suma de integrales de la forma* $R(x, y(x))\,dx$*, donde las variables están relacionadas por* $\mathrm{f(x, y)} = 0$ *(*f *un polinomio en x e y, puede expresarse en términos de un número fijo p de integrales de ese tipo más términos algebraicos y logarítmicos)*. El mínimo número *p* depende sólo de la ecuación $\mathrm{f(x, y)} = 0$, que luego llama *género* de la misma; lo que muestra que reconoció dicha noción fundamental antes que Riemann. También trabajó sobre el último Teorema de Fermat como elemento para profundizar en su estudio de las

[68] Niels Henrik Abel (1802-1829), matemático noruego.

funciones elípticas, lo que le condujo a publicar su primer trabajo importante sobre integrales definidas. Con estos avances, Abel (1827, p. 101) "transformó radicalmente la *teoría de integrales elípticas*, en la nueva *teoría de funciones elípticas*". Los teoremas de adición de funciones elípticas representan, por otra parte, aplicaciones especiales del teorema de Abel sobre la suma de integrales de funciones algebraicas. Situación que dio origen a investigar las integrales hiperelípticas, que no son otra cosa que una generalización de las que Abel inició sus pasos, para que se invirtieran al igual que las elípticas; naciendo así la *teoría de funciones abelianas de p variables*. La obra de Cauchy inspiró a Abel a trabajarlos al punto que algunos criterios de convergencia llevan hoy su nombre. Se destaca la corrección que, en 1826, hizo al error de Cauchy relacionado con su falso teorema sobre la continuidad del límite de una serie convergente de funciones continuas. Es claro que Cauchy aún no tenía la idea del concepto de convergencia uniforme.

Entre sus aportes se destacan: Ecuaciones funcionales. Transformadas integrales e integrales definidas. Ecuaciones algebraicas, quintica, ejemplos de ecuaciones solubles, formulación general. Teorema de irreducibilidad. Funciones elípticas. Integrales elípticas. Integrales hiperelípticas. Integrales abelianas. Teorema de Abel (teorema de adición). Series y su rigor. En la actualidad se usan los términos *grupo abeliano*, *extensión abeliana*, *variedad abeliana*, *función abeliana*, *categoría abeliana*, *integral abeliana*, *esquema abeliano*, entre otras como reconocimiento a su prolífera producción intelectual. Como ejemplo se esboza el conocido Premio Abel que para 2002 se estableció en su honor, cuyo objetivo es otorgar el premio trabajos científicos destacados en el campo de las matemáticas. Se resalta que también llevan el nombre de Abel un asteroide, un cráter en la Luna y una aeronave.

Veamos un esbozo de demostración del Teorema de Abel basados en el punto de vista de Roseny *et al*. (1995, p. 497), usando lenguaje y terminología propias de las matemáticas modernas para facilitar su comprensión sin usar la teoría de Galois.

Teorema de abel: *Sea k un campo con sugficientes raíces de la unidad, po rejemplo, puede tomarse* $k = \mathbb{C}$. *Sea* $f(x) \in k[x]$ *un polinomio monomico. Si* $f(x) = (x - \theta_1)(x - \theta_2) \cdots (x - \theta_n)$, *llamamos a* $F = k(\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n)$ *un campo de descomposion de* $f(x)$ *sobre* k.

Una extensión algebraica finita $\frac{E}{k}$ es llamada *torre de radicales* si existe una serie de campos intermedios $k = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{m-1} \subset E_m = E$, tal que para cada $0 \leq i \leq m$, $E_{i+1} = E\left(\sqrt[pi]{\alpha_i}\right)$ donde p_i es primo y $\alpha_i \epsilon E_i^{\,*}$. La ecuación $f(x) = 0$ es soluble por medio de radicales si existe una torre de radicales $\frac{E}{k}$ tal que $F \sqsubseteq E$. Se observa que si $f(x) = 0$ es soluble por medio de radicales, no necesariamente se tiene que $\frac{F}{k}$ sea una torre de radicales. Por ejemplo, para $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ la extensión $\frac{F}{\mathbb{Q}}$ es una extensión de Galois de grado tres que no es radical pues las tres raíces de $f(x)$ son reales y las raíuces primitivas cúbicas de la unidad no son reales, pero que sí es soliuble por medio de radicales.

Suponemos que *k* es de característica cero y sean $s_1, s_2, \cdots s_n$ algebraicamente independientes sobre *k*. sea $K = k(s_1, s_2, \cdots s_n)$. La ecuación general de grado *n* sobre *k* es $x^n - s_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n = 0$.

Supongamos $x^n - s_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ en alguna extensión de *K*. sea $L = K(x_1, x_2, \cdots x_n)$. Estas definciones de K y L se mantendrán.

El grupo simétrico s_n actua sobre L permutando las raíces $x_1, x_2, \cdots x_n$ y $K = k(s_1, s_2, \cdots s_n)$ es el campo fijo. Si $\sigma \in s_n$ y $f \in L$, entonces, $(\sigma f)(x_1, x_2, \cdots x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots x_{\sigma(n)}\right)$. Sean $\delta = \prod_{i<j}\left(x_i - x_j\right)$ y $\Delta = \delta^2$ para $\sigma \in s_n$, $\sigma\delta = \pm\delta$. Si σ es una trasposición, $\sigma\delta = -\delta$. El grupo alternante A_n es el subgrupo de s_n que consiste de los elementos $\sigma \in s_n$ tales que $\sigma\delta = \delta$. De la permutaciones se tienen los siguientes resultados: el tercero se sigue del segundo observando que $(a_1 a_2 a_3) = (a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_m)(a_m a_{m-1} \cdots a_4 a_3 a_2 a_1)$.

- El grupo $s_n$esta generado por trasposiciones;
- El grupo A_n esta generado por 3-ciclos;
- El grupo A_n esta generado por *m*-ciclos, donde *m* es cualquier número impar entre 3 y *n*.

Para ello la demostracion del teorema se lleva a cabo en cuatro pasos. *Paso 1*. Si *L* esta contenido en una torre de radicales sobre *K*, entonces $\frac{L}{K}$ es una torre de radicales. *Paso 2*. (teorema de Cauchy sobre permitaciones). Sea *p* el primo mas grande menor o igual que *n*. si $f \in L$ toma menos de *p* valores bajo la acción de s_n, entonces *f* puede tomar solamente uno o dos valores. *Paso 3*. Si *n=5*, entonces $\frac{L}{K}$ no es una torre de radicales. *Paso 4*. (teorema de Abel). La ecuación general de grado 5 sobre *k* no es soluble por medio de radicales. El paso 4 necesita una demostración adicional. Supongamos que la ecucación general de grado 5 sobre *k* es soluble por medio de radicales. Entonces, por definición, existe una torre de radicales $\frac{E}{K}$ tal que $L \sqsubseteq E$. Luego, por el paso 1 $\frac{L}{K}$ es una torre de radicales. Esto contradice el paso tres, luego la ecuación general de grado 5 sobre *k* no es soluble por medio de radicales $\triangleq$.

Weierstrass[69], conocido como el padre del análisis moderno. Proporcionó las definiciones de continuidad, limite y derivada de una función que se usan hoy día. Lo que le permitió abordar un conjunto de teoremas que estaban entonces sin demostrar de forma rigurosa, como el teorema del valor medio y el teorema de Heine-Borel en topología para conjuntos K compactos, el teorema de Bolzano-Weierstrass que garantiza que a_k tiene una sub sucesión convergente dado que consideró a K como un conjunto acotado. Diseñó pruebas para la convergencia de series y contribuyó a la teoría de funciones periódicas, funciones de variables reales, funciones elípticas, funciones abelianas, productos infinitos convergentes, el cálculo de variaciones, análisis complejo y muchos teoremas fundamentales de las ramas del análisis llevan el nombre de Weierstrass, ya sea porque él los descubrió o por haber sido el primero en dar una demostración completa y rigurosa. En realidad, el Teorema de Bolzano-Weierstrass fue demostrado primero por Bolzano en 1817 como lema previo del Teorema de Bolzano (*del valor intermedio*) y posteriormente por Weierstrass. Asimismo, el Teorema de Weierstrass también fue demostrado primero por Bolzano, en dos resultados, en la década de 1830, aunque no se publicó hasta 1930.

La riqueza del *teorema de Weierstrass* se presenta en tres versiones, el original propuesto por él, el que se maneja en los cursos de análisis para determinar la existencia de puntos críticos en un intervalo, y el tercero, como extensión a la topología, los dos últimos en términos de las matemáticas modernas.

Versión de Weierstrass:

[69] Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemán conocido como el padre del Análisis Matemático o del «padre del Análisis Moderno» (BIERMANN *et al*., 1996).

Sea $f\colon B[a,r] \sqsubset K \to \mathbb{R}$ una función continua definida en una bola cerrada y acotada de K. Entonces:

(1) f es una función acotada.

(2) Existen $c, d \in B[a,r]$ tales que f(c) ≤ f(x) ≤ f(d),es decir, f alcanza sus valores máximo y mínimo en su dominio.

La demostración la presenta en los siguientes términos: El apartado (1) se demuestra por reducción al absurdo. Si f no estuviera acotada, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiría $x \in B[a,r]$ de modo que $|f(x_v)| > n$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ así construida evidentemente es acotada ya que $|x_n - a| \leq r$. Aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza la existencia de una sub sucesión $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto c. Este punto $c \in B[a,r]$ por ser cerrada ya que:

$$|x_n - a| \leq r \Longrightarrow \left|\lim_k x_{n_k} - a\right| = |c - a| \leq r$$

por ser el valor absoluto una función continua. Como f es continua en c la sucesión $f(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(c)$ y por tanto es una sucesión acotada, lo cual es absurdo, ya que $\left|f(x_{n_k})\right| > n_k$.

Para el segundo apartado: Por el primer apartado se tiene que el conjunto $f(B[a,r])$ es acotado. Si $\alpha = \sup\{f(x) : x \in B[a,r]\}$ existe una sucesión $(x_n)_n \sqsubset B[a,r]$ con $\alpha = lim_n f(x_n)$ y, con un proceso similar al anterior, existe una sub sucesión $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto $d \in B[a,r]$. Implica que por la continuidad de f se tiene $f(d) = \lim f\left(x_{n_k}\right)$, pero como $\alpha =$

$lim_k f(x_{n_k})$ concluye que $\alpha = f(d)$, es decir, la función f alcanza su máximo absoluto en el punto d. La demostración de que f alcanza su mínimo absoluto en $B[a, r]$ se realiza de forma análoga $\triangleq$.

La presentación formal que actualmente se hace en un curso de análisis matemático tal como se expresa en el texto de análisis matemático de Cascales *et al*. (2018), muestra que el teorema no dice cuáles son los puntos extremos de la funcion en un intervalo $I = [a, b]$, solo garantiza que en ese intervalo exiten puntos extremos es en los siguientes términos:

> Si una función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces f alcanza sus extremos absolutos, es decir, existen dos puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para cualquier $x \in [a, b]$ (CASCALES *et al*., 2018, p. 114).

El teorema anterior se aplica a cualquier función continua con valores reales definidos en un intervalo $I = [a, b]$ cerrado y acotado, ya que tal intervalo puede ser interpretado como una bola cerrada con centro en el punto medio del intervalo y radio la mitad de su longitud. La clave de la demostración anterior está en la propiedad de Bolzano-Weierstrass, que afirma que cada sucesión acotada en $[a, b]$ en la bola $B[a, r]$ tiene una subsucesión convergente a un punto de $[a, b]$ en la bola $B[a, r]$. La amplitud del teorema es que se hace válido para cualquier función continua cuyo dominio cumpla esa propiedad. Tales conjuntos reciben el nombre de *conjuntos compactos* y se estudian en Topología. Lo quepermite inferir que la riqueza de este teorema va más allá, generaliza a aplicaciones continuas entre espacios topológicos en los siguientes términos:

> Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}')$ espacios topológicos y $f: (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Si $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es compacto, entonces $f(x) \sqsubseteq \mathcal{Y}$ tambien es compacto.

Gracias al teorema de Heine-Borel, se pudo formular el teorema anterior para funciones continuas en espacios topológicos y en espacios normados:

> Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $K \sqsubseteq \mathcal{X}$ un conjunto compacto y $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Si $f: K \to V$ es una aplicación continua, entonces existen $x_1, x_2 \in K$tales que $\|f(x_1)\| \leq \|f(x)\| \leq \|f(x_2)\|$ para cualquier $x \in K$.

Para simplificar: si $V = \mathbb{R}$:

- Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $K \sqsubseteq \mathcal{X}$ un conjunto compacto;
- Si $f: K \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $x_1, x_2 \in K$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para cualquier $x \in K$ $\triangleq$.

Cascales *et al*. (2018, p. 115) mencionan que David Hilbert en 1897 se refirió a este teorema en los siguientes términos: “[...]Weierstrass creó una herramienta que hoy es indispensable a todos los matemáticos para otras investigaciones analíticas o aritméticas más refinadas”. Como observación general, se hace evidente que, la continuidad uniforme depende del conjunto donde se esté considerando definida la función. Es claro que toda función uniformemente continua en un conjunto es continua en dicho conjunto, pero, en general, el recíproco no es cierto. El teorema de Heine establece la equivalencia de ambos conceptos en las bolas cerradas de K, en particular en los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$, veámoslo.

Teorema Heine. Toda función continua definida en una bola cerrada y acotada $B[a,r]$ y con valores en K es uniformemente continua. La demostración la establece como: Si una función continua en $B[a,r]$ no fuera uniformemente continua, existiría $\varepsilon > 0$ para el que no se cumple la condición de continuidad uniforme y en consecuencia existirían sucesiones $(x_n)_n$ y $(x'_n)_n$ en $B[a,r]$ tales que $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f'(x_n)| \geq \varepsilon$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass existen sub sucesiones $\left(x_{n_k}\right)_k$ y $\left(x'_{n_k}\right)_k$ de las anteriores que son convergentes aun mismo punto $z \in B[a,r]$. Usando la continuidad de f en z se tiene entonces $\lim_k f\left(x_{n_k}\right) = f(z) = \lim_k f(x'_{n_k})$. Pero, por otra parte $|f(x_n) - f'(x_n)| \geq \varepsilon > 0$ pero al pasar al límite se obtendría $0 \geq \varepsilon$, que es absurdo $\triangleq$.

De igual forma que sucedió con el teorema de Weierstrass, la demostración se basa en el hecho que las sucesiones en $B[a,r]$ poseen sub sucesiones convergentes a un punto de $B[a,r]$ y, por tanto, el teorema de Heine mantiene su validez cuando se reemplaza una bola cerrada $B[a,r]$ por un conjunto que tiene esa propiedad respecto a las sucesiones, éstos son los conjuntos denominados compactos en Topología. Pero se resalta que la noción de *continuidad uniforme* fue naciendo poco a poco; primero, de forma explícita en el trabajo de Cauchy sobre integración, donde la presenta como imprescindible mencionando que había ya sido considerada por Dirichlet, en 1854, luego por Weierstrass en 1861. Pero fue solo hasta 1870 que apareció por primera vez impresa en una publicación de Eduard Heine, muestra un teorema que afirma que, una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua. Este mismo planteamiento lo reitera en otro trabajo de 1872, aunque al escudriñar el manuscrito se infiere que él mismo parece asignar un papel en este y otros de sus resultados a Weierstrass, Schwarz y Cantor. Heine define la continuidad uniforme en la forma siguiente:

> Una función *f(x)* se llama [...]uniformemente continua desde $x = a$ hasta $x = b$, si para cualquier cantidad positiva dada ε, por pequeña que sea, existe otra cantidad positiva η_0 tal que para todos los valores positivos η menores que η_0, $f(x \pm \eta) - f(x)$ es menor que ε. Cualquiera que sea el valor que demos a x, suponiendo sólo que x y $x \pm \eta$ pertenezcan ambos a la región entre a y b; el mismo η_0 debe satisfacer la [propiedad] exigida (CASCALES *et al*. 2018, p. 116).

Recordemos que Weierstrass eliminó del lenguaje del análisis toda relación con el movimiento. Frases como *una variable se acerca a un límite*, que recuerdan las ideas de Newton, fueron transformadas en desigualdades, intentando aritmetizar todo lo posible. De él es la definición de continuidad que hoy usamos; probó la existencia de máximo y mínimo para una función continua definida en un intervalo cerrado, que ya había sido usado por Cauchy sin demostración. Probó el llamado teorema de Bolzano-Weierstrass sobre el punto de acumulación, utilizando, para ello, el método de Bolzano de dividir el intervalo en dos partes y dar una regla para elegir una de ellas. Posteriormente, los seguidores de estas ideas, Heine y Borel entre otros, obtuvieron la primera noción de compacidad por recubrimientos para un intervalo cerrado. Weierstrass, quien tenía clara la idea de convergencia uniforme y su necesidad para explicar las mencionadas propiedades, así como los problemas sobre diferenciación de series de funciones. También probó que toda función continua en un intervalo cerrado se puede aproximar por una serie uniformemente convergente de polinomios.

La propiedad fundamental de las funciones elípticas para Weierstrass, está en considerar una ecuación diferencial ordinaria en una variable compleja, pero recordemos que en este manuscrito ya se ha dejado claro que las Funciones Elípticas aparecieron por primera vez en las *Recherches* de Abel en 1827, las definió como las inversas "*formales*" de ciertas integrales elípticas. El mismo procedimiento fue usado por Jacobi en 1829 en *Fundamenta Nova*, donde mostró que una integral elíptica de primera especie es una función compleja $F: P \to \mathbb{S}$ de la forma:

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}},$$

donde P es cierta región conveniente del plano complejo. La forma de esta integral es importante y se debe a Legendre en 1805. Es claro que durante los siglos XVII y XVIII no existía tal forma canónica, lo que complicaba enormemente el estudio de tales integrales; el valor complejo k se llama módulo de la integral. Luego de una elección adecuada de P, la función F es inyectiva y diferenciable en casi todos los puntos de su dominio. Por tanto, se puede hablar de su función inversa ϕ, una función que resulta ser meromorfa.

La ecuación diferencial $(\varphi'(u))^2 = (1-\varphi^2(u))(1-k^2\varphi^2(u))$ sirvió de fundamento para el estudio de las funciones elípticas, Weierstrass la presentó bajo otra forma, veámosla: una función elíptica de Weierstrass es una función algebraica de la solución meromorfa, en general, p igual al problema diferencial

$(e_1 - e_2)\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$, con $s(0) = \infty$, donde $e_1 - e_2,\ g_2, g_3$ son constantes convenientes. Luego de establecer algunas propiedades de dicha función, motiva la definición de la función $\wp$ de Weierstrass. Se resalta aquí que la función *p* de Halphen-Bellachi tiene, el valor de una construcción matemática *efímera* entre las construcciones originales de las funciones elípticas y la función $\wp$ de Weierstrass.

La expresión $\wp(z)$ se denomina función *p* de Weierstrass

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\Omega \neq 0}\left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right]$$

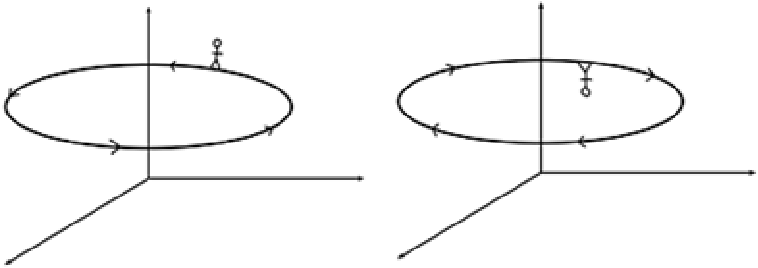
que cumple las siguientes cinco propiedades: la función $\wp(z)$ es meromorfa con polos de segundo orden en cada uno de los puntos Ω (incluyendo el origen de coordenadas). La serie que define a $\wp(z)$ es absolutamente convergente. La función $\wp(z)$ es una función par. La función $\wp(z)$ es doblemente periódica y sus periodos fundamentales son $2\omega_1$ y $2\omega_3$. La función $\wp(z)$ es elíptica de orden dos.

En forma similar apareció otro trabajo que se considera útil a destaca. El trabajo de Stokes[70], conocido como *teorema de Stokes.* Relaciona la integral de superficie del rotor de un campo vectorial sobre una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ con la integral de línea del campo vectorial sobre su borde. De esta manera se puede interpretar el teorema de Stokes como una extensión a $\mathbb{R}^3$ para superficies no planas, pero nace la dificultad para orientar el borde de una superficie de $\mathbb{R}^3$; se debe a que, al tener tres dimensiones, la idea usada en $\mathbb{R}^2$ de caminar por el borde de la superficie, que se usa a la

[70] George Gabriel Stokes (1819-1903), matemático y físico irlandés, realizó contribuciones en dinámica de fluidos, incluyendo las ecuaciones de Navier-Stokes; óptica y física matemática.

izquierda, ahora depende de hacia dónde apunta nuestra cabeza, como se muestra en la Figura 34.

Figura 34 - Interpretación de la Rotación en el teorema de Stokes



(A) Con la cabeza hacia arriba. (B) Con la cabeza hacia abajo.

Fuente: Elaboración propia.

El teorema esta esbozado en los siguientes términos: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $D \sqsubseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de S donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región donde vale el Teorema de Green. Supone que T es de clase C^2 y que ∂S^+ es la orientación del borde de S dada por $T(\partial D^+)$. Si F es un campo de clase C^1 definido en S, entonces,

$$\iint_S rot(F) = \iint_S \langle \nabla \cdot F, \eta \rangle dS = \int_{\partial S^+} F d\sigma.$$

LOS APORTES DE RIEMANN

La Hipótesis de Riemann[71] es un problema abierto desde 1859 cuya demostración, en palabras de Andrew Wiles, quien en 1993 probó el último Teorema de Fermat, dio la posibilidad de orientarse en el mundo matemático con la solución del problema de la longitud y que ayudó a los exploradores del siglo XVIII a navegar en el mundo físico. Riemann de muy corta edad fue admitido en una escuela secundaria de Luneburgo; sus profesores detectaron que tenía habilidades matemáticas y le dieron libre acceso a su biblioteca. Allí, Riemann encontró la «*Théorie des nombres*», de Legendre que lo impactó. La historia muestra a Riemann como un joven que deseaba ser pastor luterano para seguir los pasos de su padre, por ello fue a la Universidad de Gotinga a estudiar Filosofía y Teología. Pero en unos cursos que tomó con Gauss le llevaron a las Matemáticas.

Para 1847 se mudó a Berlín, donde conoció a Jacobi, Steiner y Lejeune Dirichlet. En su estadía se familiarizó con dos elementos que le inmortalizaron al unirlos: La utilización por Dirichlet de *la función zeta de Euler* que le permitió probar en 1837 que si a y b son primos entre sí entonces la progresión aritmética $(a+bn)_n$ contiene infinitos números primos, mejoró la intuición no demostrada de Fermat de la existencia de infinitos números primos en una progresión aritmética $(1+pn)_n$, cuando p es un número primo[72]. Y el desarrollo de la Teoría de Variable Compleja, que publicó en la revista *Comptes Rendus*, siguiendo el camino iniciado por Euler. Después de estudiar la obra de Cauchy en varias semanas, Riemann mencionó que esto se trataba de una *nueva matemática*. Riemann

[71] Bernhard Riemann, matemático alemán (1826-1866), realizó contribuciones al análisis y geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general trabajada por Einstein.

[72] 109 años después, Selberg consiguió una demostración sencilla de este resultado sin utilizar la función zeta.

volvió a Gotinga en 1849 para completar su tesis doctoral bajo la dirección de Gauss, quien ese año comunicó a Enke su fórmula del logaritmo integral para estimar la cantidad de números primos. Por esta época Riemann aún no se preocupaba de los números primos, pues estaba concentrado en la Teoría de Variable Compleja. Para 1851 presentó su tesis que Gauss valoró como trabajo propio de una mente creativa, activa, genuinamente matemática y de una originalidad magníficamente fértil.

En 1854, Riemann presentó su Tesis de Habilitación, pues le preocupaba el estado de salud de Gauss ya anciano, quien aún pudo oír las ideas de Riemann sobre Geometría y sus relaciones con la Física, originadas durante su colaboración con Weber. Riemann estaba convencido de que con Matemáticas se podían contestar muchas preguntas fundamentales de Física y seis años más tarde, ya catedrático en Gotinga, elaboró la *Geometría Riemanniana*, otro de los cimientos que más tarde usaría Einstein. Gauss murió un año después, le sucedió Dirichlet, quien en Berlín había conocido a Riemann y apreciaba su modestia y originalidad en su trabajo. Entre conversaciones con Dirichlet llevan a Riemann a una nueva forma de ver los números primos, expresados en una memoria de diez páginas en 1859 y contiene:

1. La obtención de la representación integral

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}\ t^{z-1} dt$$

de la función

$$\zeta(z) = \prod_{p \in P^{73}} \{1 - p^{-z}\}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z},$$

cuando $Re(z) > 1$.

2. Su prolongación analítica, mediante deformación del contorno de integración, a una función meromorfa, esto es que tiene un polo simple con residuo 1 en z = 1; llamada función *zeta de Riemann* y la obtención de sus ecuaciones funcionales estándar y simétrica respecto a la recta $x = \frac{1}{2}$, llamada *recta crítica*,

$$\zeta(z) = 2^s \pi^{s-1} sen\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z)\zeta(1-z)$$

y

$$\pi^{\frac{-z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \pi^{-\frac{(1-z)}{2}} \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta(1-z)$$

la función $\zeta(z)$ es cero en los enteros negativos pares, llamados ceros triviales.

[73] Similar a la igualdad de Euler, *P* es el conjunto de los números primos.

3. La representación integral del logaritmo de $\zeta(z)$ para *Re(z) > 1*,

$$\frac{1}{z} ln\zeta(z) = \int_1^{\infty} \prod(t) t^{-z-1} dt,$$

mediante la función

$$\prod(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\sqrt{x} + \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt[3]{x}\right) + \cdots,$$

para la que demuestra que $\pi(x) = \Pi(x) + O\left(\sqrt{x}\right)$, para $x > 1$.

4. La transformación de esta representación integral le permitió enunciar $\Pi(x)$ como una integral compleja, que evaluó por el método de los residuos, restringidos en la singularidad de $ln\zeta(z)$ en $z = 1$ y en los ceros no triviales de $\zeta(z)$. Consiguió que:

$$\pi(x) = li(x) - \sum_{\rho} li(x^{\rho}) + \int_2^{\infty} \frac{du}{(u^2 - 1)u \ln u} - \ln 2,$$

donde $li(x^{\rho})$ es el logaritmo integral de x^{ρ} y la sumatoria queda extendida a todos los ceros no triviales de la función $\zeta(z)$.

5. Fue posible que todos los ceros no triviales de la función $\zeta(z)$ tengan como parte real $\frac{1}{2}$, planteó una demostración sintética de que el número de ceros de $\zeta(z)$ en el rectángulo $0 \leq Re\ z \leq 1, 0 < Im\ z > T$, aproximadamente $\left(\frac{T}{2\pi}\right) ln\left(\frac{T}{2\pi}\right) -$

$\left(\frac{T}{2\pi}\right)$. Esencialmente la Hipótesis de Riemann[74] es la afirmación que los ceros no triviales de la función $\zeta(z)$ están en la recta x = 1/2.

Al revisar la fórmula de Riemann:

$$\pi(x) = li(x) - \sum_{\rho} li(x^{\rho}) + \int_{2}^{\infty} \frac{du}{(u^2-1)u \, \ln u} - \ln 2 + O(\sqrt{x}),$$

sobre la cantidad de números primos menores que x indica que la distribución de los números primos depende de los ceros no triviales de la función zeta. Por otro lado, el error de aproximación de la función π(x), al logaritmo integral depende de la Hipótesis de Riemann, que para 1901, Helge von Koch, demostró que $\pi(x) = li\ (x) + O(\sqrt{x}\ln x)$ sí y solo si se cumple la Hipótesis de Riemann, cuyo resultado fue refinado por Lowel Schoenfeld en 1976 al probar que la Hipótesis de Riemann es equivalente a que

$$\left|\pi(x) - \int_{2}^{x} \frac{1}{\ln t}\, dt\right| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln x$$

para todo $x \geq 2657$ ≙.

Riemann en 1859 obtuvo la cátedra que habían tenido Gauss y Dirichlet. Para 1866, tuvo que huir por el enfrentamiento entre los ejércitos de Hannover y Prusia a Gotinga, situación que afectó

[74] La recta x = 1/2 la llama *recta crítica*. El enunciado habitual de la Hipótesis de Riemann es que los ceros no triviales de $\zeta(z)$ están en la recta crítica.

gravemente su débil salud, llevándolo a fallecer a la edad de treinta y nueve años. López (2012, p. 20) indica que:

> Al poner orden en el despacho de Riemann se quemaron muchos de sus apuntes inéditos. Los que sobrevivieron al fuego permitieron conocer, medio siglo después, que Riemann sabía mucho más de lo que había publicado. Son muchas las cuestiones, matemáticas y no matemáticas, que dependen de la Hipótesis de Riemann. Por ejemplo, el resultado de Mozzochi de 1986 de que la diferencia entre dos números primos consecutivos verifica la desigualdad
>
> $$P_{n+1} - P_n < P_n^{\theta}, \text{ con } \theta = \frac{11}{20} - \delta, \text{ donde } \delta \leq \frac{1}{384}$$
>
> se mejora si se admite la Hipótesis de Riemann, que hace posible obtener la desigualdad
>
> $$P_{n+1} - P_n < P_n^{\frac{1}{2}} \ln P_n.$$
>
> […], la demostración de la Hipótesis de Riemann facilitará procedimientos más rápidos de obtención de números primos de muchas cifras, lo que afectará significativamente la seguridad del comercio electrónico, que depende en parte de nuestra gran lentitud para descomponer el producto de dos números primos muy grandes.

Riemann basado en las concepciones de Cauchy y Dirichlet incorporó una definición de integral que acogía funciones arbitrarias altamente discontinuas. Generalizó la integral de Cauchy[75], dio una definición precisa de la integral de una función definida en un intervalo que debe ser acotado y cerrado. Esta nueva integral

[75] El teorema integral de Cauchy, también conocido como el *teorema de Cauchy-Goursat* (1905) en análisis complejo, es una declaración importante sobre integrales de línea para funciones holomórficas en el plano complejo.

permitió que Volterra demostrara la existencia de una derivada acotada que no era Riemann integrable imponiendo, de este modo, una severa limitación al Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann, hecho que originó una profunda revisión de la noción de integral. Hankel[76] siguiendo las ideas de Riemann de relacionar la integrabilidad de la función con su oscilación, buscó una condición suficiente y necesaria que permitiera demostrar que la función altamente discontinua definida por Riemann es integrable. Para ello estableció el concepto *de salto de una función en un punto*, similar al concepto de oscilación, clasificando las funciones en integrables y no integrables. Bobadilla (2012, p. 12) indica que "la obra de Hankel inicia el enfoque conjuntista de la teoría de integración que permite fundar la teoría de integración moderna". No podemos descuidar, al revisar esta historiografía, la mecánica analítica del siglo XVIII, qué tan remotas de las aplicaciones eran las matemáticas puras de ese tipo; al respecto Kuhn (1977), indica que antes de la expansión de la ciencia matemática al calor, al magnetismo, a la luz, entre otras, "la física matemática era de interés, a lo sumo, para el astrónomo" (p. 32). Grattan-Guinness (1990, p. 340) manifiesta que la principal contribución de Hankel al estudio de los números complejos y complejos superiores, "fue presentando la mayor parte de lo que se sabía entonces sobre los sistemas numéricos reales, complejos e hipercomplejos". En un manuscrito compartido con su núcleo íntimo, contenía la primera presentación generalmente aceptable y comprensible del concepto de vectores n-dimensionales de Hermann-Grassmann y su producto tensorial alterno. Hankel pretendía añadir a esta obra un tratado sobre las funciones de una variable compleja, pero nunca se llegó a publicar.

Para Hankel, una función $f(x)$ tiene un salto mayor que un entero positivo σ en un punto x: sí para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal

[76] Hermann Hankel (1839-1873) matemático alemán que estudio y trabajó, con Möbius, Riemann, Weierstrass y Kronecker. Es memorable por su trabajo sobre números complejos y cuaterniones.

que $|\delta| < \varepsilon$ y $|f(x+\delta) - f(x)| > \sigma$. El salto de una función f en un punto x es la menor cota superior de los σ. Hankel tuvo esmero cuidado con el conjunto S_σ, desde el que fija la diferencia entre las funciones puntualmente discontinuas y las totalmente discontinuas. Conjunto que se puede precisar como:

$$S_\sigma = \{x\colon f(x)\ tiene\ un\ salto\ mayor\ que\ \sigma > 0\ en\ x\}$$

introduce en los siguientes términos el concepto de conjunto diseminado: un conjunto es diseminado, si entre dos puntos cualesquiera del conjunto existe un intervalo que no contiene puntos del conjunto:

> Si en un segmento se encuentra una multitud [Schaar] de puntos que poseen una cierta propiedad, digo que dichos puntos llenen el segmento, si no puede determinarse ningún intervalo en el segmento, por pequeño que sea, en el cual no haya al menos un punto de aquella multitud; que por el contrario, esa multitud de puntos no llena el segmento, sino que los puntos se encuentran diseminados en él, si entre dos puntos cualesquiera del segmento, por cerca que estén, puede determinarse siempre un intervalo en el cual no hay ningún punto de aquella multitud (HANKEL, 1870, p. 87).

Así, si para todo $\sigma > 0$ los puntos de S_σ se encuentran dispersos en el intervalo de definición de la función, esto es S_σ es diseminado y la función es puntualmente discontinua. Si, por el contrario, para algún σ los puntos de S_σ llenan un intervalo completo, es decir S_σ es denso en algún intervalo, la función es totalmente continua. Fundamentándose en estos conceptos y en la condensación de singularidades, Hankel establece la siguiente clasificación de funciones: La clase de las funciones continuas, la clase de las funciones continuas excepto en un número finito de puntos en todo intervalo finito, la clase de las funciones que tienen un número infinito de discontinuidades, las que a su vez se clasifican en dos clases: las funciones puntualmente discontinuas y las funciones totalmente discontinuas. Recordemos que las funciones de las dos primeras clases mencionadas, son funciones Riemann integrables. Hankel se preocupa por las funciones de la tercera clase, dado el problema de la existencia de su integral, manifiesta que las funciones de la tercera clase que son Riemann integrables son funciones puntualmente discontinuas, esto es una condición suficiente y necesaria para que una función acotada con infinitos puntos de discontinuidad sea Riemann integrable, lo que significa que para todo σ >0, el conjunto S_σ es diseminado. Esta condición, es necesaria pero no suficiente: si existe $\sigma > 0$ tal que S_σ es denso en un intervalo I, la oscilación de la función en algún intervalo superpuesto I sería mayor que σ. De donde la magnitud total de los intervalos, de la partición del intervalo fundamental a, b; en la que la oscilación de la función es mayor que σ siempre será mayor o igual a la longitud de I, y la función no sería Riemann integrable.

Hawkins ubica algunos ejemplos de conjuntos de puntos que Hankel pensaba, para justificar el por qué Hankel había llegado a estas conclusiones erróneas. Primer ejemplo, muestra la generalización de Dirichlet: toma $f(x) = 1 \; \forall x \in [0,1]$ excepto para x en los infinitos intervalos que tienen a $\frac{1}{2^n}$ como centro y de longitud ζ^n para un ζ fijo, $0 < \zeta < 1$ y para n=1, 2, ⋯. En estos intervalos f se comporta como la función característica de los racionales. “La magnitud total s de los intervalos en los cuales las oscilaciones son iguales a 1, es $s = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots = \frac{\zeta}{1-\zeta}$.” (Hankel, 1870, pág. 86). Lo que significa que f es totalmente discontinua. Luego muestra un ejemplo indicador para entender las bases de las observaciones de Hankel acerca de las funciones puntualmente discontinuas. Delimita $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ con n=1, 2, ⋯, y $f(x) = 1$ para los otros valores de x. En los infinitos puntos $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots$, f tiene saltos de magnitud 1. Pero a diferencia del otro ejemplo, no hay un intervalo que sea colmado con puntos de discontinuidad. En efecto:

> Si un intervalo que contiene el punto $x = \frac{1}{2^n}$ es requerido para encerrar sólo la discontinuidad que ocurre en este punto, este puede ser tomado arbitrariamente pequeño. Más aún, la magnitud total *s* de todos los intervalos de esta clase puede hacerse arbitrariamente pequeña. Pero si la magnitud del intervalo que recubre a $x = \frac{1}{2^n}$ se toma igual a ε^n, entonces la suma $s = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \cdots = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, se hace arbitrariamente pequeña con ε (HANKEL, 1870, p. 86).

Desde una mirada de las matemáticas modernas se observa que Hankel instauró una caracterización topológica de los conjuntos S_σ correspondientes a una función integrable; basado en el aparente resultado de que todo conjunto diseminado puede ser encerrado en un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña, tal como lo habían asegurado Dirichlet y Lipschitz: “Si un segmento no está lleno de puntos en los que tienen lugar saltos mayores que σ, entonces la longitud total *s* de los intervalos en los que las oscilaciones son mayores que 2σ, puede tomarse arbitrariamente pequeña” (HANKEL, 1870, p. 87).

Desde la perspectiva de Hawkins, Hankel confundió los conjuntos topológicamente insignificantes, o sea diseminados, con los conjuntos insignificantes desde el punto de vista de la teoría de la medida, particularmente medida nula. De esta forma la idea tacita de la teoría de la medida, en la segunda condición de la integrabilidad de Riemann, permaneció oscurecida por el realce dado a las ideas topológicas que eran aparentemente equivalentes. A pesar de ello, con la introducción de la noción de salto de una función en un punto, Hankel centró su atención sobre las propiedades de los conjuntos S_σ; permaneciendo sin reconocer que las propiedades de la medida de conjuntos son decisivas para la teoría de integración. La búsqueda de un procedimiento para medir las discontinuidades de una función, condujo a Hankel en 1882 a introducir la *noción de contenido*. Riemann extendió la definición integral de Cauchy reconociendo que la condición de continuidad no era esencial. Hankel descubrió, sin embargo, que "los puntos de continuidad de una función integrable pueden formar un conjunto denso" (HANKEL, 1870, p. 90).

LOS APORTES DE GIBBS, DEDEKIND, CANTOR Y KOVALÉVSKAYA

Gibbs[77] hizo contribuciones en termodinámica y en la teoría cinética de los gases, de las que estableció sus bases matemáticas. Lo destaca una frase célebre "Las Matemáticas son un lenguaje." Mencionada en la presentación de su obra *Transactions of the Connecticut Academy* que publicó como su primer trabajo sobre la representación geométrica de cantidades termodinámicas. Entre 1875 y 1878 siendo profesor de Yale, la Academia de Connecticut publicó su libro, titulado *Sobre el equilibrio de las sustancias heterogéneas*, que contiene cientos de ecuaciones matemáticas que llegaron a convertirse en base para establecer la química física como

[77] Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Matemático, físico y químico estadounidense

ciencia. Sus contribuciones científicas significativas se dieron en un momento en que la ciencia teórica no era fácil de entender ni popular, por ello gran parte de su investigación recibió poco reconocimiento. Su trabajo sobre el uso del análisis vectorial con el que describió resultados en física-matemática se centró en integrar una función a lo largo de un intervalo. Se pregunto: ¿Cómo calcular el trabajo realizado por una partícula que se mueve entre dos puntos siguiendo una trayectoria dada? ¿Cómo podemos saber si dicho trabajo depende o no de la trayectoria o camino que siga la partícula? Para responderla introdujo integrales de línea, que había sido inventadas a inicios del siglo XIX para solucionar problemas relacionados con el flujo de fluidos, fuerzas, electricidad y magnetismo como una extensión de la integral definida, cambiando el intervalo de integración por una trayectoria o camino, y la función a integrar por un campo vectorial f definido y acotado sobre esa curva, *llamada camino de integración*. La integral resultante se llama *integral de línea, integral curvilínea* o *integral de contorno,* y se denota por $\int f d\overline{\alpha}$ ó $\int \overline{f} \cdot d\overline{\alpha}$, respectivamente. El punto «·» se usa para sugerir el producto escalar de dos vectores. Este tipo de integrarles se presentan al estudiar el trabajo, la energía potencial, el flujo de calor, el cambio en la entropía, la circulación de un fluido, y otros temas que involucran el comportamiento de un campo escalar o vectorial a lo largo de una curva.

Gibbs es conocido como el padre del análisis vectorial, encargado del estudio formal de vectores en matemáticas, y es en gran parte responsable del uso generalizado de vectores en física, reemplazando los cuaterniones que Hamilton había descubierto anteriormente. Albert Einstein lo llamó la mente más grande de la historia de Estados Unidos. Los estudios de termodinámica y los descubrimientos en mecánica estadística de Gibbs allanaron el camino para muchos de los descubrimientos posteriores de Einstein. Su última contribución, *Los principios elementales de la* *mecánica estadística*, se publicó en 1902. El libro sentó las bases para una nueva rama de la física teórica, *la mecánica estadística*, que eventualmente condujo a la *mecánica cuántica*. La importancia de los hallazgos de Gibbs no fue reconocida de inmediato, especialmente en su país de origen. Cuando se leyeron sus publicaciones, la mayoría de los químicos las consideraron demasiado complejas matemáticamente y demasiado científicas para muchos matemáticos.

Por otro lado, las *cortaduras de Dedekind*[78] son clases de números racionales que personifican la primera construcción formal del conjunto de los números reales. De esta forma quedó cerrado el problema histórico sobre la fundamentación del Análisis Matemático. Dedekind llamó *cortadura* a un conjunto, o clase, α de números racionales que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \neq \mathbb{Q}$ esto es, α es un subconjunto propio de $\mathbb{Q}$;
2. Si $r \in \alpha$ y $s > r$, entonces $s \in \alpha$, esto es, todo número mayor que un elemento de α pertenece también a α;
3. α no tiene mínimo.

La clase complementaria α formada por los números racionales que no pertenecen a α, conserva la siguiente propiedad: si $r \in \overline{\alpha}$ y $s \in \alpha$, entonces $r < s$. En consecuencia, si fuera, $r \geq s$ en virtud del apartado 2 se tendría $r \in \alpha$. Ahora bien, Para probar que α es una cortadura sólo falta exponer que no tiene mínimo. Veamos: dado $r \in \alpha$ si $0 < \delta < 1$, entonces se tiene que $r - \delta > 0$, además $(r+\delta)^2 = r^2 - 2r\delta + \delta^r > r^2 - 2r\delta$, y el último número es

[78] Richard Dedekind (1831- 1916), matemático alemán, alumno de Gauss, se interesó por el método de mínimos cuadrados y la física experimental de Weber. Al culminar su doctorado fue miembro del Seminario Físico-Matemático de la universidad, donde conoció Bernhard Riemann.

mayor que 2 siempre que se cumpla $\frac{r^2-2}{2r} > \delta$. Ahora bien, un número δ entre 0 y 1 que cumpla la última condición, por ejemplo, es $\delta = \frac{r^2-2}{r^2-2+2r}$. Este número verifica las condiciones que se requieren para que $r - \delta$ pertenezca a α, a saber: $r - \delta > 0$, y $(r + \alpha)^2 > 2$. Lo que prueba que α es una cortadura.

Como ya era costumbre, cuando Dedekind publicó este trabajo, naturalmente tuvo problemas y controversias sobre su método. Lo que agudizaba la situación era que a él mismo le costaba aclarar si un número real era lo mismo que una cortadura o era algo más. Su problema fue que no intentó ofrecer una teoría de los números reales, sino construir los irracionales. Cantor criticó la construcción de Dedekind por considerar que las cortaduras no surgen de manera natural en el análisis y construyó, simultáneamente, los números reales utilizando la idea que un número irracional es el límite de una sucesión de racionales. De esta forma tomó las sucesiones de Cauchy de números racionales y llamó número real a su límite; identificando dos sucesiones cuando su diferencia tiende a cero. Fácilmente comprobó que estos números formaban un cuerpo ordenado que contiene a los racionales y demostró que es completo; esto es, que las sucesiones de números reales no dan nuevos números. Es posible observar con ojo crítico, que en ambas construcciones es necesario un número infinito de números racionales para determinar un irracional. Lo que estimuló genuinos problemas en su tiempo, por lo que no fueron aceptadas ninguna de las dos versiones. Ahora bien, recordemos que Weierstrass en 1854 pasó de los naturales a los racionales, tal como se hace hoy. A pesar de todas las críticas, Dedekind en 1872, caracterizó los números reales como un cuerpo ordenado y completo, ofreció un desarrollo como un modelo de organización y claridad. De esta forma, una vez construidos los números reales, estaba por verse cómo era posible pasar de las ideas a priori, esto es, los números naturales, a los racionales. La respuesta la ofreció Peano en 1889, cuando presentó los axiomas de los números naturales y definió sus propiedades.

Es clave reconocer que tanto a Cantor[79] junto a Dedekind y Frege se les debe la invención de la teoría de conjuntos, base de las matemáticas modernas. Gracias a las investigaciones de Cantor sobre conjuntos infinitos, se formalizó la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales). Eduard Heine desafió a Cantor a que probara el problema abierto sobre la unicidad de la representación de una función como una serie trigonométrica; problema difícil que había sido abordado por muchos matemáticos como: Heine, Dirichlet, Lipschitz y Riemann. Cantor resolvió el problema probando la unicidad de la representación 1870. Entre 1870 y 1872 publicó varios artículos que presentaron series trigonométricas, con los que expuso las enseñanzas de Weierstrass. Se destaca que con los primeros trabajos que hizo relacionados con las series de Fourier le condujeron al desarrollo de una teoría sobre los números irracionales. En esta época Cantor mantuvo una correspondencia fuertemente sugestiva con Dedekind, en la que discutían nuevas ideas y demostraciones que Cantor elaboraba. Situación que llevó a que la relación entre Dedekind y Cantor tuviera problemas por sus posiciones teórico-matemáticas.

Para 1873 Cantor logró probar que los números racionales son numerables, es decir, se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números naturales. También probó que los números algebraicos son numerables. Sin embargo, sus intentos por decidir si los números reales son numerables resultaron muy difíciles para él. Un año después probó que, en cierto sentido, casi todos, los números son trascendentes, al probar que los números reales no son

[79] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), conocido como Georg Cantor, matemático nacido en Rusia, nacionalizado alemán, de ascendencia austríaca y judía.

numerables, mientras que los números algebraicos sí lo son. Cantor reveló que aquellos no tienen siempre el mismo tamaño, esto es el mismo cardinal: por ejemplo, el conjunto de los racionales es *numerable*, es decir, del mismo tamaño que el conjunto de los naturales, mientras que el de los reales no lo es: lo que le condujo a afirmar que existen varios infinitos, más grandes los unos que los otros. Todo este estudio sobre los conjuntos infinitos, fueron considerados como una locura matemática por su profesor Kronecker. Sin embargo, Cantor trató durante muchos años de probar la hipótesis del continuo, lo que se sabe hoy es, que es imposible, y que tiene que ser aceptada, o rechazada como axioma adicional de la teoría. Cantor sistematizó el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y usó el concepto de conjunto abierto. Es el autor del *Principio de los intervalos encajados,* creador de ciertos conjuntos en topología y en teoría de la mediada.

Kovalévskaya[80], matemática y escritora rusa, de etnia romaní, hizo contribuciones demostrativas en análisis, ecuaciones diferenciales parciales y en mecánica. Por ser soltera Rusia no le ofreció el pasaporte, con el objeto de seguir estudios en el extranjero, por ello, Kovalévskaya pactó un matrimonio de conveniencia con Vladímir Kovalevski. Investigó dos memorias sobre matemáticas y una sobre astronomía. La primera sobre ecuaciones con derivadas parciales, en la que consiguió corregir y mejorar un resultado de Cauchy, enunciando y demostrando lo que hoy se llama *Teorema de Cauchy-Kovalévskaya*. La segunda un estudio sobre integrales abelianas, y la tercera explicaba la forma de los anillos de Saturno. Por estas tres memorias obtuvo el título de doctora *summa cum laude* en la Universidad de Gotinga en 1874, siendo la segunda mujer en obtener este título en el mundo, a pesar que fue la primera en obtenerlo en Alemania, María Agnesi fue la primera mujer en

[80] Sofía Kovalévskaya o Sofía Vasílievna Kovalévskaya (1850-1891), matemática y escritora rusa, de etnia romaní que hizo contribuciones significativas en los campos del análisis, las ecuaciones diferenciales parciales y la mecánica.

obtenerlo en Bolonia en el siglo XVIII. Para este logro fue crucial la ayuda de Weierstrass quien le buscó una universidad que aceptase doctorar a una mujer, ya que él conocía su trabajo, llegó a mencionar que cada uno de estos tres trabajos hubiera bastado por sí solo para hacer una tesis doctoral. Este mérito logrado le permitió obtener el *premio Bordin* de la Academia de ciencias de París en 1888, y el de la Academia de ciencias de Estocolmo al año siguiente; que le permitieron acceder a un puesto permanente como profesora en esta misma universidad, convirtiéndose así en una de las primeras mujeres docentes universitarias en Europa. También participó activamente en la redacción de la revista *Acta Mathematica*, fundada por Mittag-Leffler.

Sus investigaciones estuvieron centradas en análisis matemático, sobresalen sus aportes racionados con la rotación de un sólido y una reducción del teorema de Bruns. El teorema de Cauchy-Kovalévskaya también conocido como "teorema de Cauchy-Kowalevsky es el principal teorema de existencia local y unicidad para ecuaciones diferenciales analíticas asociadas con problemas de valor inicial de Cauchy (VON KOWALEVSKY, 1875, p. 25*)*. Este teorema se relaciona con la existencia de soluciones a un sistema de *m* ecuaciones diferenciales en *n* dimensiones cuando los coeficientes son funciones analíticas. La demostración alcanzada del teorema se extiende en validez para funciones analíticas de variables reales o complejas en los siguientes términos.

Sea *K* el campo de los números reales o complejos, y sea $V = K^m$ y $V = K^n$. Sean $A_1, \cdots, A_{n-1}$ funciones analíticas definidas en alguna vecindad de (0, 0) en *W* × *V* y tomando valores en las matrices *m* × *m*. Sea b una función analítica con valores en *V* definido en el mismo término. Entonces hay una vecindad de 0 en *W* en el que el problema cuasilineal de Cauchy $\partial_{x_n} f = A_1(x, f)\partial_{x_1} f + \cdots + A_{n-1}(x, f)\partial_{x_{n-1}} f + b(x, f)$ con condición inicial $f(x) = 0$ en la hipersuperficie $x_n = 0$ tiene una solución analítica única $f: W \to$ V cerca de 0.

La calidad de este teorema le hace extender a espacios vectoriales abstractos, reales o complejos, de dimensión finita, con $n = \dim W$. Con $A_1, \cdots, A_{n-1}$ funciones analíticas con valores en $End\ (V)$ y b una función analítica con valores en V, definidas en alguna vecindad de (0,0) en $W \times V$. El teorema de Cauchy-Kovalévskaya también se amplía a orden superior en los siguientes términos:

> Si F y f_j son funciones analíticas cercanas a 0, entonces el problema de Cauchy no lineal $\partial_t^k h = F(x, t, \partial_t^j h\, \partial_x^\alpha h$ donde $j < k$ y $|\alpha| + j \leq k$con condiciones iniciales $\partial_t^j h(x, 0) = f_j(x)$, donde $0 \leq j \leq k$, tiene una solución analítica única cercana a 0. Esto se sigue del problema de primer orden al considerar las derivadas de h que aparecen en el lado derecho como componentes de una función con valores vectoriales (KOWALEVSKY, 1875, p. 29).

En la actualidad existe una amplia generalización de este teorema para sistemas de ecuaciones diferenciales parciales lineales con coeficientes analíticos; entre ellos, el teorema de Cauchy-Kovalévskaya-Kashiwara, debido a Masaki Kashiwara en 1983. Este teorema implica una formulación cohomológica, presentada en lenguaje de módulos D. La condición de existencia implica una condición de compatibilidad entre las partes no homogéneas de cada ecuación y la desaparición de un funtor derivado.

LOS APORTES DE LIPSCHITZ, BOREL, JORDAN Y SU INFLUENCIA EN EL TRABAJO DE LEBESGUE

Recordado por la *condición de Lipschitz*[81], una desigualdad que garantiza una solución única a la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. A pesar que Peano ya había dado un teorema de existencia para esta ecuación diferencial, con condiciones que garantizan al menos una solución. Los aportes de Lipschitz fueron en diversos temas: teoría de números, teoría de las funciones de Bessel y series de Fourier, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, mecánica analítica y teoría del potencial. Trabajó en formas diferenciales cuadráticas y la mecánica. La interpretación mecánica de Lipschitz de la geometría diferencial de Riemann llegó a convertirse en un paso vital en el camino hacia la teoría especial de la relatividad que posteriormente presentaría Einstein. Lipschitz demostró que los enunciados geométricos podían interpretarse como leyes mecánicas que permitían profundizar en las oportunas relaciones geométricas existente entre ellas.

Su trabajo sobre el método de Hamilton-Jacobi para integrar ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico general le condujo a aplicaciones destacadas en mecánica celeste. Con relación a su dedicación a la teoría algebraica de números lo llevó a estudiar los cuaterniones y buscar generalizaciones como las *álgebras de Clifford*. De hecho, Lipschitz redescubrió las álgebras de Clifford y fue el primero en aplicarlas para representar rotaciones de espacios euclidianos, introduciendo así los grupos de Spin, Spin (norte-*norte*). La profundización de Lipschitz sobre el método de Hamilton-Jacobi, resultó ser el límite clásico de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, y levantó un puente entre la mecánica

[81] Rodolfo Otto Segismundo Lipschitz, (1832-1903), nacido en königsberg, Prusia Oriental, ahora Kilingrado-Rusia.

clásica y la mecánica cuántica. Este límite se encuentra cuando $h \rightarrow 0$. Se interpreta de forma que, si el *cuanto* de acción tiende a 0 porque el universo es continuo, entonces la mecánica cuántica se convierte en clásica. Se trata de tomar la solución de onda plana libre de la ecuación de Schrödinger que vincula la función de onda ψ con la acción S y sustituirla en la propia ecuación de Schrödinger. El resultado es directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi para la partícula, lo que conduce a la ecuación de Schrödinger dependiendo del tiempo:

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t) + V\psi(\vec{r},t)$$

permite la solución de onda plana normalizada de la ecuación de Schrödinger:

$$\psi(\vec{r},t) = e^{\frac{iS(\vec{r},t)}{h}}$$

simultáneamente se van calculando los sumandos, considerando ignorar en la notación las variables de ψ partiendo de la aplicación de onda plana de Schrödinger.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i}{h}\frac{\partial S}{\partial t}e^{\frac{iS(\vec{r},t)}{h}} = \frac{i\partial S}{\partial t}\psi$$

$$\nabla\psi = \frac{i}{h}\nabla S_\psi$$

$$\nabla^2\psi = \nabla\left(\frac{i}{h}\nabla S_\psi\right) = \frac{i}{h}\left(\nabla^2 S_\psi + \nabla S\nabla\psi\right) = \frac{i}{h}\nabla^2 S_\psi + \left(\frac{i}{h}\nabla A\right)^2 \psi$$

al sustitur en la ecuacion de Schrödinger

$$ih\left(\frac{i}{h}\frac{\partial S}{\partial t}\psi\right) = \frac{h^2}{2m}\left[\frac{i}{h}\nabla^2 S_\psi + \left(\frac{i}{h}\nabla S\right)^2 \psi\right] + V_\psi$$
$$-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{ih}{2m}\nabla^2 S + \frac{1}{2m}(\nabla A)^2\psi + V_\psi$$

que para el limite clásico cuando $h \to 0$, genera el caso particular de Hamilton-Jacobi para la partícula libre en un potencial. Ahora bien la ecuación

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V_\psi$$

es el puente entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica. Esta naturaleza cuántica aparece plasmada en la constante de Planck $h \approx 6{,}6x10 - 34 \quad J \cdot seg.$ Recordemos que la ecuación característica de Hamilton es:

$$W(q, E) = \pm\sqrt{2m}\int_{q_0(E)}^{q} dq\,\sqrt{E - a\,sec^2\left(\frac{q}{l}\right)} \triangleq .$$

Borel[82] junto a René-Louis Baire y Henri Lebesgue fue uno de los pioneros de la teoría de la medida y sus aplicaciones a la teoría de la probabilidad. En uno de sus libros de probabilidad introdujo un experimento mental bajo el nombre del *teorema de los infinitos monos*. Publicó investigaciones sobre teoría de juegos. Introdujo: una *σ-´algebra particular* de importancia para la probabilidad moderna. Trabajó el concepto de variable aleatoria, fundamental en la aplicación de modelos tanto estadísticos como estocásticos de diversos fenómenos, donde se hace necesaria su σ-álgebra de Borel. Trabajó en series divergentes, teoría de funciones, probabilidad, teoría de juegos (de estrategia), su trabajo terminó con el teorema de Heine-Borel. En probabilidad se destaca: *σ-álgebra* o *σ-campo de Borel*. Las leyes cero-uno de Borel-Cantelli. La ley fuerte de los grandes números conocida como teorema de Borel.

El teorema del mono infinito afirma que un mono pulsando teclas al azar sobre un teclado durante un periodo de tiempo infinito casi seguramente podrá escribir finalmente cualquier texto dado. En este contexto, el término *casi seguramente* es un término matemático con un sentido preciso y el *mono* no es en realidad un animal, sino es una metáfora de la creación de una secuencia aleatoria de letras *ad infinitum*. La *σ-álgebra* surgió por el trabajo de algunos contemporaneos directos entre ellos: George Bolle, Heinrich Heine, René Baire, y entre los post contemporaneos, su alumno Henry Lebesgue. Esta σ-álgebra constituye la base formal de la teoría de medida y de las medidas de probabilidad, las funciones medibles y la integral de Lebesgue; así como las variables aleatorias y sus momentos, la noción de longitud, para áreas y volumen en $\mathbb{R}$ y el problema sobre cuáles conjuntos de $\mathbb{R}$ se pueden medir en longitud.

[82] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956), matemático francés.

La σ-álgebra de Borel en ℝ, considera la clase $\mathcal{O}$ que reúne todos los conjuntos abiertos de ℝ, con la topología a usual. La σ-álgebra de Borel en ℝ se define como la σ-álgebra generada por $\mathcal{O}$, y se denota por $B(\mathbb{R})$. Esto es $\sigma(\mathcal{O}) = B(\mathbb{R})$ Los subconjuntos que pertenecen a $B(\mathbb{R})$ son llamados conjuntos de Borel o simplemente *borelianos*. Algunos ejemplos de conjuntos de Borel en ℝ son: el intervalo (a, b), con $a, b \in \mathbb{R}$. cualquier intervalo abierto pertenece a la clase $\mathcal{O}$, por tanto, pertenece a $B(\mathbb{R})$. Los intervalos cerrados $[a, b]$. Se tiene que $[a, b] = \{(-\infty, a) \cup (b, \infty)\}^c$ y $(-\infty, a)$ y (b, ∞) pertenecen a $B(\mathbb{R})$, luego $[a, b] \in B(\mathbb{R})$.

Un σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$ está determinada si $\mathcal{O}_2$ es la familia que reúne todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$, con la tipología usual; entonces la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^2$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{O}_2$, y se denota como $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Esto es $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) =$ es $\sigma(\mathcal{O}_2)$. Otros ejemplos son:

- Si $\overline{x_0} = (x_0, y_0)$ y $r > 0$, entonces la bola abierta con centro en $\overline{x_0}$ y radio *r* definida como

$$\mathcal{B}(\overline{x_0}, \mathrm{r}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)} < r\right\}$$

es un conjunto en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Un rectángulo abierto (a, b) × (c, d) es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, por tanto, pertenece a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. En general, el interior de cualquier polígono regular pertenece a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

- Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,entonces $\{(x, y)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. En efecto,

$$\{(x, y)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}\left((x, y), \frac{1}{n}\right),$$

y como $\mathcal{B}\left((x,y),\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Entonces:

$$\{(x,y)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}\left((x,y),\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \ \triangleq.$$

Conjuntos de Borel: la familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles contiene a todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$ y, por tanto, a todos los conjuntos que sea posible formar a partir de los abiertos mediante las operaciones: paso a complementarios, uniones e intersecciones numerables, etc. Todos estos conjuntos compondrán la familia de conjuntos de Borel. Se expresa como: sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se dice, forman una σ-álgebra si satisface las condiciones siguientes:

1. Los conjuntos ϕ y X pertenecen a $\mathcal{A}$;
2. $\mathcal{A}$ es cerrada por paso al complementario, es decir si B $\in \mathcal{A}$ entonces $B^c \in \mathcal{A}$;
3. $\mathcal{A}$ es cerrada respecto a uniones numerables, es decir si $B_k \in \mathcal{A},\ k = 1, 2, \cdots$ entonces $\cup\, B_k \in \mathcal{A}.$

Procediendo como para la σ-álgebra $\mathcal{M}$, se deduce que si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra entonces $\mathcal{A}$ es cerrada también respecto a las intersecciones numerables y respecto a la diferencia de conjuntos. También es extensible para un conjunto B de $\mathbb{R}^n$, donde se hacen equivalentes las siguientes condiciones:

i. B es medible.

ii. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto $U \sqsupset B$ tal que $m^*\left(\frac{U}{B}\right) < \varepsilon$.

iii. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un cerrado $F \sqsubset B$ tal que $m^*\left(\frac{B}{F}\right) < \varepsilon$.

iv. Existe un conjunto $G_\delta, G \sqsupset B$, tal que $m^*\left(\frac{G}{B}\right) = 0$.

v. Existe um conjunto $F_\sigma,\ H \sqsubset B$, tal que $m^*\left(\frac{B}{H}\right) = 0$

Por otro lado, para 1893, Jordan[83] extendió la integral de Riemann a funciones de varias variables, definiendo el contenido de paralelepípedos en $\mathbb{R}^n$. En análisis complejo, *el lema de Jordan* es un resultado frecuentemente utilizado conjuntamente con el teorema de los residuos para evaluar integrales de contorno e integrales impropias. Planteó su enunciado en los siguientes términos: sea f una función continua evaluada en el cuerpo de los complejos, definida en un contorno semicircular $C_R = \left\{Re^{i\theta}: \theta \in [0, \pi]\right\}$ de radio positivo R sobre el semiplano superior, centrado en el origen. Si la función f es de la forma $f(z) = e^{iaz}g(z),\quad z \in C_R$, con un parámetro positivo a, entonces el lema de Jordan establece la siguiente cota superior para la integral de contorno:

$$\left|\int_{C_R} f(z)\ dz\right| \leq \frac{\pi}{a} M_R$$

[83] Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922), matemático francés, conocido tanto por su trabajo sobre teoría de grupos, como por su influyente Curso de análisis (*Cours d'analyse*).

donde,

$$M_R := \max_{\theta \in [0,\pi]} \left|g\left(Re^{i\theta}\right)\right|.$$

El mismo resultado es aplicable al semiplano inferior y no al superior cuando $a < 0$.

Jordan introdujo significativos conceptos topológicos en 1866, entre ellos, la noción de homotopía de caminos observando la deformación de caminos uno dentro del otro; y la definición de un grupo de homotopía de una superficie, aunque no usó explícitamente la terminología de grupo. Mostró interés particular en la teoría de grupos finitos ya que no existía una teoría para estos grupos convirtiéndose en el primero en desarrollar un enfoque sistemático del tema. Trabajo que sólo fue reconocido cuando Liouville volvió a publicar la obra original de Galois en 1846, que dio un significado notable a sus aportes. Para Jordan un grupo era lo que hoy llamamos grupo de permutación. Para dar una ilustración de la forma como trató de construir la teoría de grupos, hablaremos un poco sobre sus contribuciones a los grupos solubles finitos. La forma estándar de definir tales grupos hoy en día sería decir que son grupos cuyos factores de composición, en otras palabras son grupos abelianos. De hecho, Jordan introdujo el concepto de una serie de composición, una serie de subgrupos, cada uno de los cuales es normal en el anterior, con la propiedad que no se pueden agregar más términos a la serie para que conserve esa propiedad.

Aunque la clasificación de grupos abelianos finitos es sencilla, la clasificación de grupos solubles finitos está mucho más allá de los matemáticos. Jordan, sin embargo, vio claramente esto como un objetivo del tema, incluso si no era uno que pudiera resolverse. Consideró la clasificación de grupos de movimientos euclidianos. Trabajo que le otorgó amplia reputación internacional al punto que Sophus Lie y Felix Klein lo visitaron en París en 1870 para estudiar con él. El interés de Jordan en grupos de transformaciones euclidianas en el espacio tridimensional influenció la obra de Lie y Klein en sus propias teorías de grupos continuos y discontinuos.

Estudió grupos de permutación primitivos y demostró un teorema de finitud. Definió la clase de un subgrupo del grupo simétrico como $C > 1$ si C era el número más pequeño tal que el subgrupo tiene un elemento en movimiento a C puntos. Su teorema de finitud mostró que dado C solo hay un número finito de grupos primitivos con clase C distintos de los grupos simétricos y alternos. Realizó una generalización, al trabajo de Hermite sobre formas cuadráticas con coeficientes integrales, lo que le condujo a considerar el grupo lineal especial de *norte* × *norte* matrices de determinante 1 sobre los números complejos que actúan sobre el espacio vectorial de polinomios complejos en *norte* × *norte* indeterminados de grado *metro*× *metro*.

Jordan es recordado entre analistas y topólogos por su prueba sobre una curva simplemente cerrada que divide un plano en exactamente dos regiones, ahora llamado *teorema de la curva de Jordan*. Fue solo su mayor comprensión del rigor matemático lo que le hizo darse cuenta que era necesaria una demostración de tal resultado. También originó el concepto de funciones de variación acotada, lo que llevó a que se le reconociera por su definición de la *longitud de una curva*. Estos conceptos aparecen en su *Cours d'analyse de l'École Polytechniqu* publicado en tres volúmenes entre 1882 y 1887. Mientras que el teorema de la curva de Jordan apareció en la tercera edición que fue publicada entre 1909 y 1915. Para 1882, cuando se publicó el primer volumen, Jordan estaba dando conferencias en la *École Polytechnique* y su libro fue escrito como texto para los estudiantes de esa institución. Su libro resultó ser un poco extraño ya que es un libro de análisis riguroso construido sobre los intentos de poner el tema sobre una base firme iniciada por Cauchy y al que Weierstrass le otorgó una promoción enorme porque lo consideró como importante y preciso. Su trabajo fue compartido con estudiantes de ingeniería por lo que Jordan consideró que su obra estaba en un nivel que sería algo inapropiado para esos estudiantes, ya que se menciona que en un comentario suyo con Lebesgue le dijo que su texto era un *curso de análisis de la École Polytechnique*, solo eso.

Entre las muchas contribuciones de Jordan al análisis también debemos mencionar su generalización de los criterios para la convergencia de una serie de Fourier. El *Jornal de Mathématiques Pure et Appliquées* fue una revista matemática líder y desempeñó un papel muy importante en sus publicaciones y en el desarrollo de las matemáticas a lo largo del siglo XIX. Se le conocía generalmente como el *Jornal de Liouville* dado que fue él quien fundó la revista en 1836. Cuando Liouville muere en 1882 Jordan es admitido en la revista, para 1885 ya se había convertido en editor del Jornal, cargo que mantuvo durante más de 35 años hasta su muerte.

CAPÍTULO 6

Las Matemáticas Modernas Vistas Desde la Formalización de Diversas Ramas que la Conforman

LAS MATEMÁTICAS MODERNAS VISTAS DESDE LA FORMALIZACIÓN DE DIVERSAS RAMAS QUE LA CONFORMAN

Entre ellas: Análisis Matemático, Análisis Complejo, Análisis Funcional, Análisis no estándar, Topología y Topología Algebraica por nombrar algunas, como ramas emergentes de la formalización del Calculo Infinitesimal.

El siglo XX registra dos nuevos avances en el desarrollo del análisis: la integral de Lebesgue, y el Análisis no-Estándar de Robinson. El concepto de integral desarrollado por Cauchy es aplicado a funciones continuas, generalizadas por Riemann, y a funciones con cierto tipo de discontinuidades; el espacio de las funciones integrables no es cerrado bajo los procesos de convergencia y del límite de sucesiones de funciones, lo que restringe su aplicabilidad a otras ramas de las matemáticas. Basado en los trabajos del Peano y Jordan, Lebesgue logró definir conjunto medible y medida que generalizan, en la recta, las nociones de intervalo y de longitud de un intervalo respectivamente. Con base en estos nuevos conceptos, Lebesgue introdujo una nueva clase de funciones llamadas *funciones medibles*, para las que adquiere sentido una nueva definición de integral, definida como el límite de integrales de funciones que toman valores constantes en conjuntos medibles. En este sentido, la integral de Lebesgue es una generalización de la integral de Riemann, que se obtiene como el límite de integrales de funciones que toman valores constantes sobre intervalos. La clase de las funciones integrables en el sentido de Lebesgue tiene propiedades óptimas para las intenciones del análisis matemático, dado que los límites de sucesiones y series convergentes de funciones de este tipo resultan ser también funciones integrables. De esta forma, la nueva teoría de la medida e integración sienta las bases para el desarrollo de la Teoría Matemática de Probabilidad y Estadística en la ciencia actual.

Con relación al trabajo de Robinson en 1960, en su libro *Análisis no Estándar*, retoma el problema de aritmetizar el análisis a partir del concepto de número y de magnitud infinitamente pequeña. A partir de construcciones basadas en teoría de conjuntos introdujo el concepto de *número hiperreal* con lo que logra dar un significado preciso a los "infinitamente pequeños" que Euler usaba en sus argumentos y demostraciones. Con ello, los procesos de límite y convergencia del análisis son sustituidos por operaciones y procedimientos algebraicos en la clase de los números hiperreales. A pesar que la nueva formulación de Robinson dio lugar a un cálculo más simple, la construcción de los números hiperreales resulto ser muy elaborada.

LOS APORTES DE LEBESGUE

Lebesgue[84] siguiendo la tradición de su maestro Borel, añadió a la definición de medida, la noción de «*numerablemente aditiva*» extendiendo la longitud ordinaria de un intervalo a conjuntos abiertos, basado en la propiedad de que todo abierto es la unión numerable y disjunta de intervalos abiertos, lo que denominó conjuntos medibles; pero no estudió sus propiedades. Sin embargo, fue Lebesgue quien analizó de manera rigurosa dichas propiedades logrando obtener una colección especial de «*conjuntos medibles*» a la que denominó una *σ-álgebra*. La nueva noción introducida por Borel fue el marco ideal en el que Lebesgue desarrolló su integral. Realizó un profundo estudio a la integral de Riemann, encontrando que esa integral posee limitaciones. Como respuesta, emergió la

[84] Henri Léon Lebesgue (1875-1941), matemático francés.

integral de Lebesgue en 1901, más amplia que la de Riemann, cuyo desarrollo se sustenta, sobre la noción de *medida* similar a los antiguos griegos. En 1904 definió las *funciones medibles* como aquellas que permiten desarrollar una teoría de integración mucho más amplia y satisfactoria que la Teoría de Integración de Riemann. El camino que lideraron Riemann, Darboux y Lebesgue en la construcción de un cálculo más profundo y riguroso, estableció las condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad, no solo en el sentido de Riemann, para funciones acotadas, sino también por una generalización significativa de la integral de Riemann.

El nombre de Lebesgue está asociado a un determinado número de resultados considerados como fundamentales en matemáticas superiores, entre ellos: a) El teorema de la curva de Jordan: un resultado topológico recogido en análisis complejo. El teorema indica que toda curva cerrada simple del plano lo divide en dos componentes conexas disjuntas que tienen la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada, el *interior* de la curva, y la otra es no acotada y se le llama *exterior*. El teorema fue demostrado por Oswald Veblen en 1905. Una generalización del teorema se conoce como teorema de Jordan-Schönflies. A pesar de su simplicidad, el teorema requiere herramientas muy técnicas para demostrarlo. Por otro lado, el teorema no necesariamente es válido en cualquier superficie. Por ejemplo, aunque es válido en el plano, o la esfera, no es válido en el toro. b) La forma canónica de Jordan en algebra lineal, que no es otra cosa que la forma de la matriz de un endomorfismo de un espacio vectorial en cierta base asociada a la descomposición en suma directa de subespacios invariantes bajo dicho endomorfismo. Dicha forma canónica consistirá en que la matriz estará formada por "bloques de Jordan" en la diagonal y bloques de ceros fuera de ella. c) El teorema de Jordan-Holder resultado de unas series de composiciones. d) El lema de Jordan ofrece una forma sencilla de calcular la integral a lo largo del eje real de funciones del tipo$f(z) = e^{i\ a\ z}\ g(z)$ que sea holomorfas en el semiplano superior y continuas en el cierre del semiplano superior excepto en un número finito de singularidades fuera del eje real z_1, z_2, …, z_n. Considera el contorno cerrado C que es la concatenación de los caminos C_1 y C_2, en topología, el teorema de la curva de Jordan establece que:

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$$

al considerar que el camino C es el encadenamiento de los caminos C_1 y C_2. Dado que en C_2 la variable $z \in \mathbb{R}$, la segunda integral es real,

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

el lado izquierdo puede ser calculado usando el teorema de los residuos para obtener, para todo R mayor que el $maximo\ de\ |z_1|, |z_2|, \cdots, |z_n|$,

$$\int_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k),$$

donde $Res(f, z_k)$ denota el residuo de f en la singularidad z_k. De ahí que, si f satisface la condición

$$\lim_{R\to\infty} M_R = 0,$$

al tomar el límite cuando R tiende a infinito, la integral de contorno sobre C_1 se anula por el lema de Jordan, y obtiene el valor de la integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) \ \triangleq.$$

Es necesario recordar que una vez construido el cuerpo $\mathbb{R}$, fue Hilbert quien afirmó que para trabajar era más cómodo dar sus propiedades de forma axiomática, ya que se sabían construir, que seguir el camino que lleva de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Así, dio un sistema de axiomas en 1899, divididos en cuatro grupos: *Axiomas de conexión*. *Axiomas de cálculo*. *Axiomas de orden*. *Axiomas de continuidad*. Aclaró que no eran un sistema independiente y que era preciso probar su consistencia, con lo que, desde el punto de vista matemático, el objeto existe. De cualquier modo, el punto de vista axiomático tampoco fue generalmente aceptado, ya que muchos prefirieron el punto de vista constructivo mostrado por Lebesgue.

El desarrollo y uso del cálculo infinitesimal ha tenido efectos importantes en casi todas las áreas de la vida moderna, ha sido fundamento para el cálculo numérico aplicado en varios campos técnicos y/o científicos cuya principal característica ha sido la continuidad de sus elementos, en especial en física. Con su extensión al análisis numérico, prácticamente ha influido a todos los desarrollos técnicos modernos como la diversidad de ingenierías, medicina, biología, meteorología, por nombrar algunas. Con relación a los sistemas teóricos o físicos cuyos elementos carecen de continuidad, se ha desarrollado una rama especial conocida como *Matemática Discreta*. El cálculo de integrales de tipos especiales conllevó al descubrimiento de una serie de resultados de la teoría de las funciones especiales como, las funciones beta y gama expresadas como:

Función Beta $\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ con $a > 0, b > 0$.

Función Gamma $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}$ con $a > 0$

$\Gamma(a+1) = a\Gamma(\mathrm{a})$con $a > 0$, si es un numero natural, entonces:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(\mathrm{a}) = \mathrm{a}(\mathrm{a}-1)\Gamma(a-1) = \cdots a!\,\Gamma(1) = \mathrm{a}!$$

La teoría de integración de Lebesgue como ya se mencionó antes, introdujo una nueva integral que trajo más funciones integrables, pero no sólo eso: la identificación de funciones que coinciden en casi todo punto sugirió una nueva manera de comparar la suma de la serie y la función de partida, aspectos que podrían no coincidir en todos los puntos, pero quizá la discrepancia es sólo en un conjunto que llamemos *pequeño*, esto es, de medida nula. Resultados que logra a partir de los aportes de Borel y Jordan a la teoría de la medida en 1901. Con la definición de la integral de Lebesgue, se generaliza la noción de la integral de Riemann extendiendo el concepto de área bajo una curva para incluir funciones discontinuas, trabajo reconocido como uno de los logros del análisis moderno que expandió el alcance del análisis de Fourier, para 1904 Lebesgue presentó una discusión sobre las condiciones que Lipschitz y Jordan habían utilizado para asegurar que *f(x)* es la suma de su serie de Fourier. Sus trabajos aportaron en ramas como la topología, teoría del potencial, análisis de Fourier, problema de Dirichlet, cálculo de variaciones, teoría de conjuntos, teoría del área de superficie y teoría de la dimensión.

En 1922 publicó *Notas sobre Trabajos Científicos* (*Notice sur les travaux scientifique),* lo destacado es que para esta fecha ya tenía publicados al menos 90 libros y diversos artículos. En este trabajo de noventa y dos páginas proveyó un análisis del contenido de sus artículos. Lebesgue, (1920, p. 260) *e*xpresó: "Reducida a teorías generales, las matemáticas serían una forma hermosa sin contenido. Morirían rápidamente". Lo que permite inferir que él consideró que su trabajo era una generalización, y era temeroso de las mismas. Sin embargo, desarrollos posteriores demostraron que su temor no tenía fundamento, lo que permite entender el curso que siguió su trabajo. Con relación a la teoría de la mediada trató de definir rigurosamente la longitud de un subconjunto de $\mathbb{R}$, así como el área de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, el volumen de un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y, de manera más general, la medida N-dimensional de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, con $N \in \mathbb{N}$ arbitrario. Este trabajo es reconocido como revolución en el Análisis Matemático cuyo desenlace fue la teoría de la medida y el nacimiento del *Análisis Funcional*, e incluso de la *Topología General*.

Se debe considerar que el uso del infinito es un elemento imprescindible para estudiar la medida de Lebesgue; por ejemplo, la longitud de un subconjunto de $\mathbb{R}$ podrá ser un número real no negativo, pero hay conjuntos que deben tener longitud infinita, como el propio $\mathbb{R}$, o cualquier semirrecta. Es por ello que se debe añadir a $\mathbb{R}_0^+$ un nuevo elemento, denotado por ∞, obteniendo así el conjunto $[0, \infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$. La idea es usar ∞ como un número positivo más, para el que, se hace necesario dar al conjunto anterior una estructura de orden, topológica y algebraica, que extiende a las usuales de $\mathbb{R}_0^+$, mejorándolas en algunos aspectos. Convendrá eso sí, prestar atención a los casos contados en que, manejar a ∞ como un número positivo más, pueda conducir a error. Primero, se extiende el orden usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo: $x \leq \infty, \forall\, x\ \in [0, \infty]$. Queda claro que, de esta forma, [0, ∞] se convierte en un conjunto totalmente ordenado, cuyo máximo es ∞ y cuyo mínimo es 0. De hecho, es fácil comprobar que el orden de $\mathbb{R}_0^+$ ha mejorado al pasar a [0, ∞], en el sentido que: Todo subconjunto no vacío de [0, ∞] tiene supremo e ínfimo. Nótese que cuando, para un conjunto no vacío $A \sqsubset [0, \infty]$, se escribe $\sup A < \infty$, esto es $\infty \notin A$ y que, A está mayorado en el sentido usual, como subconjunto de ℝ.

Miremos con atención la topología de [0, ∞], que es posible llamar *usual* y se describe de varias maneras. Por una parte, se trata de una topología de orden, que puede definirse en cualquier conjunto totalmente ordenado. Los abiertos de [0, ∞] son las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos, con $\alpha, \beta \in [0, \infty]$:

- $[0, \beta[\ = \{x \in [0, \infty]: x < \beta\}$
- $]\alpha, \infty] = \{x \in [0, \infty]: \alpha < x\}$
- $]\alpha, \beta\ ] = \{x \in [0, \infty]: \alpha < x < \beta\}$

Estos conjuntos forman una base de la topología de [0, ∞], que da lugar a una base de entornos de cada punto. Para cada $x \in \mathbb{R}^+$, la familia $\{\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[: 0 < \varepsilon < x\}$ es base de entornos de x, mientras que $\{\ [0, \varepsilon[: \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de 0. Vemos así que [0, ∞] induce en $\mathbb{R}_0^+$ la misma topología que ℝ. Finalmente, la familia $\{\,]\alpha,\infty]: \alpha \in \mathbb{R}^+\}$ es base de entornos de ∞. Por tanto, si $x_n \in [0,\infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\{x_n\} \to \infty$, sí, y sólo si, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \alpha$ para $n \geq m$. Cuando $x_n < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto equivale a que la sucesión de números reales $\{x_n\}$ diverja positivamente, como se esperaba $\triangleq$.

Ahora bien, al mantener fijo $N \in \mathbb{N}$ y denotado por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Todo lo que haremos depende de N, aquí se olvida esta dependencia, para evitar que N tenga que aparecer constantemente, complicando la notación. Para $n \in \mathbb{N}$ será útil escribir $\Delta_n = \{k \in N: k \leq n\}$. Dado $k \in \Delta_N$, denotado por $\pi_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a la k-ésima proyección coordenada en $\mathbb{R}^N$, es decir, por $\pi_k(x) = x(k)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$. Cabe preguntarse ¿cuál debe ser la longitud de un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, el área de un rectángulo, o el volumen de un ortoedro?, lo que conduce a las siguientes definiciones.

Un intervalo en $\mathbb{R}^N$ será un producto cartesiano de intervalos en $\mathbb{R}$, y se denota $\mathcal{J}$ al conjunto de todos los intervalos acotados en $\mathbb{R}^N$, entendiendo que $\emptyset \in \mathcal{J}$. Para $I \in \frac{\mathcal{J}}{\{\emptyset\}}$ y cada $k \in \Delta_N$, es claro que $\pi_k(I)$ es un intervalo no vacío y acotado en $\mathbb{R}$. Esto permite definir la medida elemental del intervalo I como el número

$$M(I) = \prod_{k=1}^{N} \left(\sup \pi_k(I) - inf\ \pi_k(I)\right)$$

naturalmente se define $M(\emptyset) = 0$. Lo que permite obtener una función $M: \mathcal{J} \to \mathbb{R}_0^+$ que se define como *la medida elemental de intervalos acotados*.

Se observa que la idea clave de Lebesgue consistió en usar la función M para estimar por exceso la medida de cualquier conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$. Para ello, consideró un recubrimiento numerable de E por intervalos acotados, esto es, una sucesión $\{In\}$ en $\mathcal{J}$ tal que:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

tales recubrimientos existen. Por ejemplo,

$$E \subset \mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]^N.$$

Intuitivamente, la medida de E debería ser menor o igual que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(I_n),$$

pero igual de meritorio es que, eligiendo de forma adecuada la sucesión {In}, esta suma pueda aproximarse a la medida de E tanto como se quiera. Situación que motiva la definición de *medida exterior de Lebesgue* como la función $\lambda^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$ definida por:

$$\lambda^*(E) = ínf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) \colon I_n \in \mathcal{J}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \;\; \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

para cada conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, se dice también que $\lambda^*(E)$ es la medida exterior de E ≜.

Lebesgue define que el conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es medible cuando verifica la siguiente condición:

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^* \left(\frac{W}{E} \right), \qquad \forall\, W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \;\; [* \, 1],$$

denota por M a la familia de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$. Observa que, si $E \in M$ y $F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ verifican que $E \cap F = \emptyset$, toma W = E ∪F en $[* \, 1]$ para obtener $\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*(E) + \lambda^*(f)$, luego se limita a trabajar con conjuntos medibles. Por lo que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es la restricción de la medida exterior de Lebesgue a la familia de los conjuntos medibles, esto es, la función $\lambda \colon M \to [0, \infty]$ definida por: $\lambda(E) = \lambda^*(W), \;\; \forall\, E \in M \quad [* \, 2]$, para cada $E \in M$ dice simplemente que λ(E) es la medida de E ≜.

Con relación a la integral de Lebesgue es sabido ya que a finales del siglo XIX era claro que la integral de Riemann tiene significativas limitaciones, por ejemplo, su insuficiente comportamiento con ciertos procesos de convergencia. Ésta y otras limitaciones obligaron a realizar nuevos intentos de construcción de otras integrales. Los aportes realizados por Jordan, Borel, Young en esta dirección solo se culminaron con Lebesgue. Recordemos que el conjunto de funciones integrables es relativamente pequeño: Hay funciones sencillas que no son integrables. Por ejemplo,

1) la función de Dirichlet, $f(x) = \begin{cases} 0 \;\; si\ x\ es\ racional \\ 1\ si\ x\ es\ irracional \end{cases}$ no es integrable.
2) Su extensión a varias variables tiene algunas dificultades.

Lo importante aquí es que ambos problemas están íntimamente relacionados con el hecho de ampliar el concepto de medida a otros conjuntos de números reales no necesariamente intervalos y por extensión a otros subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Las cuestiones pues a resolver son varias: ¿qué conjuntos se pueden medir?, ¿cómo medirlos?, ¿qué funciones se pueden integrar? y ¿cómo hallar su integral? en busca de solución a estos interrogantes primero define cuáles conjuntos son "medibles". Define: Dado I un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ un intervalo (respectivamente acotado), si existen $I_1, I_2, \cdots, I_n$ intervalos acotados, de números reales tales que $I = I_1 \cdot I_2 \cdot \cdots \cdot I_n$. A partir de esto adhiere nuevos conjuntos: menciona que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es una *σ-álgebra* si:

i) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$,
ii) Si $\{A_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, y
iii) Si A $\in \mathcal{A}$ entonces $\mathbb{R}^n \setminus$ A $\in \mathcal{A}$.

Por otro lado, define, si S es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una menor σ-álgebra en $\mathbb{R}^n$ conteniendo a S, que denomina la σ-álgebra engendrada por S. Considera la σ-álgebra engendrada por la familia de conjuntos de intervalos acotados, familia que llama σ-álgebra de Borel, notada $\mathcal{B}$, mientras que a sus elementos los llama *borelianos*. Para hacernos idea de lo grande que es esta familia se debe tener en cuenta que todos los conjuntos abiertos son borelianos. Para mirar aún más su dimensión, obsérvese que los conjuntos que resultan de la intersección numerable de abiertos (conjuntos tipo G_δ), no necesariamente abiertos, y los conjuntos que resultan de la unión numerable de cerrados, conjuntos tipo F_δ, no necesariamente cerrados, son también conjuntos borelianos. Una vez elegida la familia de conjuntos medibles asigna una medida denotada como λ y la que llama *medida de Borel-Lebesgue*, en los siguientes términos: para cada A ∈ $\mathcal{B}$, la medida λ, mediante:

$$\lambda(A) = \text{Ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n); A \sqsubseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,\ \ I_n\ intervalo\ acotado,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Conocía que existen conjuntos A borelianos de medida cero, $\lambda(A) = 0$, que contienen subconjuntos no medibles. Adhiere a la σ-álgebra de Borel estos subconjuntos. Considera como M la mínima σ-álgebra que contiene simultáneamente a la σ-álgebra de Borel y a todos los subconjuntos de los elementos de ésta que son de medida nula. Sus elementos los denomina *conjuntos medibles-Lebesgue* o simplemente *medibles*. Los conjuntos medibles los representa por E = A ∪ N, donde A es un boreliano y N es un subconjunto de un boreliano de medida nula. Por lo que ahora es posible definir una nueva medida, que nota equivalentemente λ y que llama *medida de Lebesgue;* viene dada por $\lambda(E) = \lambda(A)$ siempre que E = A ∪ N, y $\lambda(N) = 0$.

La riqueza de estas construcciones es que permiten definir los tipos de funciones que se pueden integrar. Indica que una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama *medible* si $f^{-1} \in M$ para todo intervalo abierto I. Como ejemplos de funciones medibles menciona: las funciones continuas, funciones iguales a una función continua y las funciones características de los conjuntos medibles. Aquí se recuerda la definición de función característica: si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, se llama *función característica de A,* $\mathcal{X}_A$, a la función $\mathcal{X}_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

Para evaluar la integral define: Sea E $\subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f: E \to \mathbb{R}_0^+$. Representa como $G(f)$ a la gráfica de dicha función, esto es, $G(f) = \{(x, f(x)); x \in E\}$ y por $R(f)$ al recinto determinado por su gráfica y la recta $y = 0$, esto es, $R(f) = \{(x, y); x \ \in E,\ 0 < y < f(x)\}$. Es sabido que si E es un conjunto medible entonces $G(f)$ y $R(f)$ son dos conjuntos medibles en $\mathbb{R}^{N+1}$ y $\lambda\big(G(f)\big) = 0$. Nótese que, dado que $\lambda\big(G(f)\big) = 0$, si las desigualdades estrictas que definen el conjunto $R(f)$ se pueden sustituir por igualdades.

Sea E $\subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $f: E \to \mathbb{R}_0^+$ una función medible. Define la *integral de f en E como la medida del recinto $R(f)$*, esto es,

$$\int_E f d\lambda = \lambda(R(f))$$

además, aclara: dada una función medible $f: E \to \mathbb{R}$, se dice que f es integrable en E si:

$$\int_E |f| d\lambda < \infty$$

en tal caso se define la integral de f por

$$\int_E f d\lambda = \int_E f^+ d\lambda - \int_E f^- d\lambda,$$

donde $f^+ = Max\,\{f, 0\}$ y $f^- = Max\,\{-f, 0\}$, nótese que ambas funciones son medibles positivas. Dicha integral recibe el nombre de *integral de Lebesgue* de f en E. Nota L(E) al espacio formado por las funciones medibles que son integrables en E, esto es

$$L(E) = \left\{ f: E \to \mathbb{R} \quad medible;\ \int_E |f|\ d\lambda < \infty \right\} \triangleq.$$

Sealey (2006) indica que al tratar de hacer una "comparación" con la integral de Riemann se observa que si f es una función acotada definida sobre el intervalo [a, b] sobre la recta numérica. Para cada partición de dicho intervalo en subintervalos por medio de los puntos $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$, tales que $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Ahora, formemos las sumas de Riemann:

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

donde m_i y M_i representan respectivamente el ínfimo y el supremo de los valores de f sobre el intervalo $J_i = [x_{i-1}, x_i]$. La función f es *Riemann integrable* sobre $[a, b]$ sí para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición del intervalo, tal que $S - s < \varepsilon$; y en tal caso, el límite común de las sumas cuando $max[x_{i-1}, x_i] \to 0$ $[* 1]$, se llama la integral de Riemann de f sobre$[a, b]$ y se denota por el símbolo:

$$(R) = \int_a^b f(x)dx,$$

para distinguirla de la integral en el sentido de Lebesgue de f sobre $[a, b]$, representada por:

$$\int_a^b f(x)dx,$$

Si la función acotada f es Riemann integrable sobre $[a, b]$, entonces f también es integrable en el sentido de Lebesgue y, además,

$$\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

Para demostrarlo, comencemos observando que las sumas notadas en el párrafo anterior como $[* 1]$ son las integrales en el sentido de Lebesgue de las "funciones escalonadas"

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathcal{X} J_i(x), \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i \mathcal{X} J_i(x),$$

que verifican las relaciones $\varphi \leq f \leq \psi$ con excepción de un conjunto finito. Por consiguiente, si f es integrable Riemann sobre $[a, b]$, para cada entero positivo k, existen funciones escalonadas φ_k y ψ_k, tales que $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ y, además,

$$\int_a^b (\psi_k - \varphi_k) < \frac{1}{k}.$$

las funciones borelianas

$$g(x) = \sup_k \varphi_k(x), \quad h(x) = \inf_k \psi_k(x)$$

verifican las relaciones $g \leq f \leq h$ con la posible excepción de un conjunto numerable, además, para cada k, $0 \leq h - g \leq \psi_k - \varphi_k$, de donde:

$$\int_a^b (h - g) \leq \int_a^b (\psi_k - \varphi_k) < \frac{1}{k}.$$

Luego, la función no negativa $h - g$ tiene integral nula sobre $[a, b]$ y, por tanto, $g = f = h$ en casi todo punto, de donde se sigue que f es medible. Puesto que, para cada índice k,

$$\int_a^b \varphi_k \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \psi_k$$

y en virtud de la definición de integral de Riemann,

$$\int_a^b \varphi_k \leq (R) \int_a^b f \leq \int_a^b \psi_k$$

se sigue que:

$$\left| \int_a^b f - (R) \int_a^b f \right| \leq \int_a^b \psi_k - \int_a^b \varphi_k < \frac{1}{k},$$

y la igualdad del enunciado se obtiene haciendo que k tienda a infinito ≜.

Actualmente en la teoría de la transformada de Fourier se trabaja desde la integral de Lebesgue y es usada la forma compleja. Desde el punto de vista de las matemáticas modernas, la integral de Lebesgue reserva explicaciones en las pruebas porque tiene acceso a resultados poderosos y más sencillos de aplicar, ejemplo: el *teorema de convergencia dominada* y el *teorema de Fubini*, por nombrar algunos. Las dificultades de definición de la transformada de Fourier para funciones no integrables requieren recursos de análisis no elemental, que se adaptan mejor a la integral de Lebesgue y facilitan comprender la manera en que la transformada de Fourier se usa en el mundo real. La adaptación al cálculo numérico exige el uso de una versión discreta con técnicas de tipo algebraico. También se observa cómo el algoritmo de la transformada rápida de Fourier permite simplificar cálculos numéricos en determinados casos.

ANÁLISES FUNCIONAL DE DAVID HILBERT

Hilbert r*ealizó avances significativos en casi todas las ramas de las matemáticas. Inicialmente se dedicó a la teoría de números, cuyo estado resumió en su obra Zahlbericht* (Comentario sobre los números, 1897), trata sobre teoría algebraica de números y presenta una síntesis del trabajo de Kummer, Kronecker y Dedekind, pero enriquecido con sus propias ideas. En lo relacionado con la fundamentación de las matemáticas hizo esfuerzos en fijar un número mínimo de términos y definiciones básicas sin identificar y de éstas deducir rigurosamente la estructura matemática completa definiéndola de forma axiomática, una forma similar a la de Peano, por ello, son conocidos como creadores de la ciencia axiomática. Intentó formalizar la Aritmética sobre una base lógica consistente, sin contradicciones, y completa, donde siempre se pueda probar si una afirmación es verdadera o falsa. Su intento no fue posible, pocos años después Kurt Gódel demostró que es imposible conseguirlo. Sin embargo, los esfuerzos de Hilbert pusieron las matemáticas sobre unas bases rigurosas. Otro logro importante fue la resolución del problema de Dirichlet.

Con relación a sus trabajos en geometría *euclídea* hizo un estudio sistemático de sus axiomas, lo que le llevó a proponer 21 axiomas a los que analizó su significancia. Luego de esto puso de manifiesto que Euclides no había partido de conceptos patentes y que había supuesto muchas cosas sin especificarlas. Para 1899 publicó la obra *Fundamentos de Geometría* (*Grundlagen der Geometrie*), en la que por primera vez expuso los 21 axiomas. Posteriormente se dedicó a las ecuaciones integrales, transformando el *Análisis funcional* en una Algebra de infinitas dimensiones.

Durante el siglo XIX surgieron varias ecuaciones integrales, a pesar que su origen parece algo difícil de rastrear a inicios de este siglo, es Bois Raymond en 1888 quien sugiere este nombre e invita a la comunidad matemática a desarrollar una teoría general que las abarque. Para el efecto Roux y Volterra obtienen los primeros resultados generales al probar teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones integrales de la forma:

$$\int_a^x k(x,t)f(t)dt = g(x)$$

para la incógnita f, donde k y g se definen sobre un intervalo $[a,b]$ con $g(a) = 0$ y toma la integral sobre un intervalo variable $[a,y]$. En uno de los trabajos de Volterra hace notar la semejanza de la ecuación integral considerada, con un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes triangular sustituyendo la integral por sus sumas de Riemann. Para 1890 Fredholm usando este tipo de resultados demuestra que el problema de Dirichlet tiene solución única para todo dominio acotado del plano con frontera suficientemente regular. De forma similar establece una analogía entre las ecuaciones integrales de segundo tipo con intervalo de integración fijo.

En este contexto surgen los espacios de Hilbert como una generalización de los espacios euclídeos y las matrices infinitas, utilizadas posteriormente por Werner Heisenberg y Max Born para el desarrollo de una de las formulaciones, fundamentales de la *Mecánica cuántica*. Aplicó su trabajo sobre ecuaciones integrales a la teoría cinética de los gases y encontró una solución a la ecuación de distribución de *Maxwell-Boltzmann*. Aquí es necesario recordar que con los resultados de Fredholm, Poincaré y Schwarz, es que Hilbert en 1904 prueba la conjetura de Poincaré y reexamina la ecuación:

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t) dt = g(t) \quad [*]$$

llevandola a un marco mas general cuando el núcleo k es continuo y simétrico, esto es: $k(x,t) = k(y,x)$. Al igual que Poincaré, ve la analogia con las matrices simétricas usadas en álgebra lineal; lo extiende a formas cuadráticas y muestra que la teoria de Fredholm se simplifica en contexto. Elementos que le permiten, en el mismo año, publicar otros artículos en los que aplica estos resultados a problemas de contorno en ecuaciones diferenciales y a la teoría de Sturn-Liuville. Para 1906 Hilbert extiende las ecuaciones integrales hacia una teoría general de formas bilineales y cuadráticas continuas, que particularmente, son aplicadas a ecuaciones integrales asociando a toda pareja de funciones f y g continuas en $[a,b]$, el escalar:

$$(f,g) = \int_a^b f(s) g(s) ds,$$

e introduce la noción de *sistema ortogonal completo de funciones* como una sucesión $\{\psi_n\}$ de funciones continuas en un intervalo real $[a,b]$ tal que $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$ y que cumple con la relación de completitud

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f,\psi_n)\,(g,\psi_n)$$

para todo para de funciones f y g continuas en $[a,b]$. Prueba que si $\{\psi_n\}_n$ es uno de tales sistemas, por ejemplo, el sistema trigonométrico, f es una solución de la ecuación marcada con $[*]$ en la página anterior, con $\lambda = 1$ considerando los coeficientes de Fourier

$$k_{pq} = \int_a^b \int_a^b k(x,y)\psi_p(x)\psi_q(y)\,dx\,dy$$

$$b_p = \left(g, \psi_p\right)$$

$$x_p = \left(f, \psi_p\right),$$

Los $\{x_p\}$ satisfacen el sistema infinito:

$$x_p = \sum_{n=1}^{\infty} k_{pq} x_n = b_p, \quad p = 1, 2, \cdots \quad [**]$$

y la desigualdad de Bessel obtiene que:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} k^2{}_{pq} < \infty, \quad \sum_{p=1}^{\infty} b_p^2 < \infty \ y \ \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 < \infty.$$

recíprocamente, si $\{x_p\}$ satisfacen

$$\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 < \infty$$

como solución la ecuación marcada $[**]$. Por tanto, la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \int_a^b k(x,y)\psi_n(y)dy$$

converge absoluta y uniformemente; al igual, define una función continua $u(x)$. Entonces, $f = g - u$ y satisface $(f,\psi_n) = x_n$ y f es solución de la ecuación $[*]$, lo que conduce a Hilbert a considerar la forma cuadrática general

$$Q(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}x_p x_q, \quad k_{pq} = k_{qp,}$$

donde,

$$\sum_{p=1}^{\infty} x_n^2 < \infty.$$

Cabe aclarar que en todo este desarrollo está implícito el espacio ℓ^2 real, por analogía con $\mathbb{R}^n$ e introduce la distancia

$$d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

extensible para funciones de ℓ^2en $\mathbb{R}$ a las nociones de continuidad y limite. Nota que la bola unitaria de ℓ^2 no satisface el teorema de Bolzano-Weierstrass, e introduce el equivalente a la noción actual de *topología débil* en ℓ^2, que permite extraer *sub-sucesiones débilmente convergentes* de sucesiones acotadas. Método conocido como *principio de selección de Hilbert*. A partir de entonces, la escuela de Hilbert junto al álgebra del infinito, se convierte en la geometría del infinito, tanto que a partir de 1906 Schmidt y Fréchet de forma independiente trasfieren a la situación considerada por Hilbert toda la terminología de la geometría euclidiana. Donde las sucesiones $x = (x_n)$ tales que:

$$\sum_n x_n^2 < \infty$$

son los puntos, o vectores, del espacio de Hilbert ℓ^2. Para los puntos x, y el número

$$\langle x, y \rangle = \sum_n x_n y_n,$$

donde la serie es automática y absolutamente convergente, es su *producto escalar* y

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_n x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

es la norma que verifica la desigualdad triangular $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, así como la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Con relación al *Análisis Funcional*, nombre asignado hacia 1912 por J. Hadamard, se conoce como la rama de las matemáticas, específicamente del *análisis*, que trata del estudio de espacios de funciones que tiene sus raíces históricas en el estudio de transformaciones como la transformada de Fourier, el estudio de las ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales. Es clave recordar que la palabra *funcional* se remonta al cálculo de variaciones, aplicado a una función cuyo argumento es otra función, trabajo atribuido desde la segunda mitad del siglo XIX, a Johan Bernoulli, Euler y Volterra en las que la incógnita era una función o curva, y para cuya resolución era conveniente tratar con funciones que dependían de curvas. Inicialmente se consideró el análisis funcional como el estudio de los espacios vectoriales normados completos sobre los reales o los complejos. Estos espacios son conocidos como *espacios de Banach*. Un ejemplo es el *espacio de Hilbert*, donde la norma surge de un producto escalar. Estos espacios son importantes en la formulación matemática empleada en mecánica cuántica.

La evolución del Análisis Funcional durante el siglo XX, ayudado por el avance del Análisis Clásico y la Topología, ha determinado un grado creciente de abstracción que ha desembocado en que el objeto de esta disciplina sea el estudio de espacios topológicos, es decir, donde se ha definido alguna estructura que define la "cercanía", que al mismo tiempo disfrutan de algún tipo de estructura algebraica. En las matemáticas actuales, el análisis funcional incluye el estudio de los espacios de Fréchet y otros espacios vectoriales localmente convexos y aún topológicos. Entre los objetos de estudio en análisis funcional están los *operadores lineales continuos* definidos en los espacios de Banach y de Hilbert. Estos conducen naturalmente a la definición de C^* $álgebra$ y otras álgebras de operadores. Un curso moderno de Análisis Funcional frecuentemente comienza con el estudio de los espacios vectoriales topológicos, continúa con los espacios lineales métricos, sigue con los espacios normados y concluye con los espacios prehilbertianos. A los estudiantes se les recomienda tener cierta familiaridad con la teoría de funciones de una y varias variables reales, incluyendo sucesiones y series, diferenciación total y parcial, integración de Riemann y de Lebesgue, así como con rudimentos de Algebra Lineal y de Análisis de Fourier.

Dentro de la familia de espacios vectoriales dotados de una estructura métrica, los espacios de Hilbert son los que generalizan cualquier dimensión del espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ que dan lugar a la obtención de una estructura sencilla para las aplicaciones lineales y continuas sobre un espacio de Hilbert con valores en el cuerpo de escalares, y a una introducción natural a las series de Fourier abstractas. Los espacios de Hilbert pueden ser clasificados totalmente: hay un espacio único de Hilbert módulo isomorfismo para cada cardinal de la base (hilbertiana). Puesto que los espacios de Hilbert finito-dimensionales se entienden completamente en álgebra lineal, y puesto que los morfismos de los espacios de Hilbert se pueden dividir siempre en morfismos de espacios con dimensionalidad *alef-0* $\varkappa(0)$ y sus morfismos.

La definición de un espacio de Hilbert es dada en los siguientes términos: Un espacio prehilbertiano $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que es completo respecto a la norma $\|x\| = \sqrt{x, x}$ se denomina *espacio de Hilbert*. Esta definición es soportada por el siguiente teorema: sea $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$, donde:

$$\|x_k\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

es un espacio de Hilbert. La demostración está dada en los siguientes términos:

sea $(x^n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^2. Como $\left|x_k^m - x_k^n\right| \leq \|x^n - x^m\|_2, k\epsilon\mathbb{N}$, concluye que $(x^n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ es de Cauchy en K, y por ser K un espacio completo $\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k$ para cada $k \epsilon \mathbb{N}$. Vemos que x^m converge a $x = (x_1, x_2, \cdots)$ y $x \epsilon \ell^2$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $0 \epsilon \mathbb{N}$ talque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^n - x_k^m\right|^2 = \|x^n - x^m\|_2^2 < \varepsilon^2, \qquad n, m \geq n_0.$$

fija $N \epsilon \mathbb{N}$. En particular:

$$\sum_{k=1}^{N} \left|x_k^n - x_k^m\right|^2 < \varepsilon^2$$

pasa al límite cuando *m* tiende a infinito y tiene que:

$$\sum_{k=1}^{N} \left|x_k^n - x_k^m\right|^2 < \varepsilon^2, \quad n \geq n_0$$

toma supremos en *N* y concluye que $\|x^n - x\|_2 \leq \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Lo que significa $x^n \to x$. La desigualdad de Minkowskyi implica que:

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{N} \left|x_k - x_k^{n_0}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{N} \left|x_k^{n_0}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon + \left\|x_{n_0}\right\|.$$

toma el límite cuando N tiende a infinito para concluir que $x \in \ell^2$ ≜

Se aclara que $C([0,1])$ es el espacio de las funciones continuas no es un *espacio de Hilbert respecto al producto escalar* en los siguientes términos: Sea $C([0,1])$ el espacio de las funciones continuas en [0,1] con valores en ℝ. Entonces $C([0,1])$ no es un espacio de Hilbert respecto al producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

lo demuestra indicando: sea,

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \ t < \frac{1}{2} \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

como $0 \leq f_n \leq 1$, se tiene que para $m \geq n$

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|^2 \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(t) - f_m(t)|^2 \, dt \leq \frac{4}{n},$$

que le permite concluir que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Supone que existe $f \epsilon\, C([0,1])$ tal que $\lim_n \|f_n - f\|_2 = 0$. Implica que:

$$\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^2 = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|^2 \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(t) - f(t)|^2 \, dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |1 - f(t)|^2 \, dt.$$

toma el límite cuando *n* tiende a infinito y concluye que:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|^2 \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f(t)|^2 \, dt = 0.$$

Como *f* es continua entonces $f(t) = 0; \ 0 < t < \frac{1}{2}$ y $f(t) = 1$, y para $\frac{1}{2} < t < 1$. Como consecuencia *f* no es continua en $t = \frac{1}{2} \triangleq$.

En términos de las matemáticas modernas, es clave reconocer que los espacios de Banach generales son mucho más complicados que los espacios de Hilbert. Dado que un espacio de Banach es un espacio vectorial, una base es un sistema de generadores linealmente independiente. Este concepto, cuando la dimensión no es finita, suele carecer de utilidad; lo sustituye el de *conjunto fundamental*. Un conjunto de vectores es fundamental si la clausura topológica del subespacio vectorial que engendra es el espacio completo. Dado que un vector pertenece a su clausura topológica si es el límite de una sucesión de vectores del subespacio vectorial engendrado, se descubre que, en caso de disponer de un conjunto fundamental, es posible poner todo vector del espacio como el límite de una sucesión de combinaciones lineales de los vectores de un conjunto fundamental. Un ejemplo de lo anterior es *el teorema de aproximación de Weierstrass* que afirma que toda función real continua en un intervalo compacto puede ser aproximada mediante polinomios. El espacio de Banach es, en este caso, el conjunto de las funciones continuas en un compacto y el conjunto fundamental las potencias enteras del argumento. Este teorema se extiende mediante el *teorema de Stone-Weierstrass*, para cualquier número real $p \geq 1$, un ejemplo de un espacio de Banach viene dado por los espacios L^p.

Aquí es importante aclarar que en los espacios de Banach, una gran parte del estudio involucra el espacio dual, esto es, el espacio de todas las funcionales lineales continuas. Como en álgebra lineal, el dual del dual no siempre es isomorfo al espacio original, si hay un monomorfismo natural de un espacio en su doble dual siempre. La noción de derivada se amplía a las funciones arbitrarias entre los espacios de Banach, resulta que la derivada de una función en cierto punto es realmente una función lineal continua. Los *espacios de Banach generales* son más complicados que los espacios de Hilbert, y no pueden clasificarse de manera sencilla como estos. En particular, muchos espacios de Banach carecen de una noción análoga a una base ortonormal.

Como ya se indicó anteriormente, los espacios de Banach generales son más complicados que los espacios de Hilbert, y no pueden clasificarse de manera sencilla, dado que muchos de ellos carecen de una noción análoga a una base ortonormal. Ejemplos de estos espacios de Banach son los L^p para cualquier número real $p \geq 1$. Con medida μ sobre el conjunto X, entonces $L^p(X)$, también denotado como $L^p(X, \mu)$, o $L^p(\mu)$, tiene como vectores de equivalencia $[f]$ de función medibles cuyo valor absoluto de $p-$é$sima$ potencia tiene integral finita; esto es, funciones f para las que se cumple:

$$\int_x |f(x)|^p d\mu(x) < \infty.$$

sí μ es la medida de contaje, entonces la integral se puede sustituir por una suma, esto es:

$$\sum_{x \in X} |f(x)|^p < \infty.$$

Por lo que no hace necesario tratar con clases de equivalencia, y el espacio se denota $\ell^p(X)$, escrito simplificadamente como ℓ^p en el caso cuando X es el conjunto de enteros no negativos. Cabe recordar que en el estudio de los espacios de Banach, una gran parte del trabajo implica el *dual*: esto es, el espacio de todos los continuos del espacio a su campo subyacente, los llamados *funcionales*. Un espacio de Banach puede identificarse con un subespacio de su *bidual*, que es el dual de su espacio dual. El mapa correspondiente es una isometría, dado que un espacio de Banach y su bidual ni siquiera tienen por qué ser isométricamente isomorfos en ningún sentido, al contrario que en la situación de dimensión finita. Además, la derivada se puede extender a funciones arbitrarias entre espacios de Banach.

Este amplio desarrollo alcanzado por el análisis, permitió que en los primeros años del siglo XX se desarrollaran conceptos que condujeron a la teoría de los espacios de Hilbert. Partiendo de trabajos previos sobre las ecuaciones integrales de Volterra, Fredholm entre otros. Hilbert y su alumno E. Schmidt encontraron valores propios y funciones propias, propiedades de ortogonalidad y sistemas lineales de infinitas ecuaciones, y desarrollaron conceptos asociados a los espacios de sucesiones del tipo l^2.

LA CARACTERIZACIÓN DEL ESPACIO DE FUNCIONES DE RIESZ, FISCHER, BANACH Y STEINHAUS

En 1906 sobre espacios métricos, Riesz elaboró la noción de distancia en los espacios de funciones L^2, poco después llegaron los teoremas que permitían la identificación de funciones de cuadrado integrable con sucesiones de l^2. Fatou demostró que la igualdad de Parseval expresada en los siguientes términos:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

se cumple sin más hipótesis que $f \in L^2$.

Para esta época ya eran conocidas algunas condiciones más restrictivas sobre esta función, ver Kahane, et al. (1995, p. 100) manifiestan que su nombre se debe a un resultado de Parseval en 1799, pero publicado en 1806, anterior a la primera memoria de Fourier, en que fue probado de manera formal. El resultado recíproco que lo completó, se debe independientemente a Riesz y Fischer; ambos lo enuncian para sistemas ortogonales de funciones, no exclusivamente para el sistema trigonométrico. La versión de Fischer, adapta algunos términos a la notación actual: sea φ_1 , φ_2 , $\cdots$, un conjunto numerable de funciones de $L^2(a, b)$, que forma un sistema ortonormal. Si la serie de términos constantes no negativos $a_1^2 + a_2^2 + \cdots$ converge, $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots$ convergería en media cuadrática a una función φ definida en casi todo punto y tal que:

$$a_k = \int_a^b \varphi\varphi_{k.}$$

Fischer primero prueba la completitud de L^2: las sucesiones de Cauchy convergen en la norma de L^2. Probado esto, de las hipótesis sobre $\{a_k\}$ y $\{\varphi_k\}$ deduce que las sumas parciales de $\sum_k a_k \varphi_k$ forman una sucesión de Cauchy, y consigue su resultado. Riesz comienza la prueba con el sistema trigonométrico para luego extenderlo a una familia ortonormal cualquiera a través de un sistema lineal de infinitas ecuaciones. Una consecuencia inmediata del teorema de Riesz-Fischer es la convergencia en norma cuadrática de la serie de Fourier: $\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|^2 = 0$.

La caracterización del espacio de funciones L^2 con el de sucesiones l^2 fue un resultado clave en la construcción de la teoría de espacios de Hilbert. Riesz mostró que la integral de Lebesgue permite que L^2 se construya sobre ella. De esta forma el sistema trigonométrico se convirtió en un ejemplo modelo de base ortogonal y las series de Fourier de funciones de L^2 fueron desarrolladas en esa base ortogonal. La convergencia en L^2 de la serie de Fourier planteaba el estudio de un problema análogo en los espacios L^p: ¿es $\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_p = 0$ para $f \in L^p$ diferente de 2? Con p finito, ya que si $p = \infty$ la convergencia sería uniforme y el límite debería ser una función continua, a sabiendas que ni siquiera eso es suficiente. La primera respuesta llegó en sentido negativo: Banach y Steinhaus (1918, p. 90) probaron en 1918 que no hay convergencia en media, es decir, en L^1. Que evoca el principio de acotación uniforme relacionado con la no convergencia en la norma de L^1.

Cartwright (1982, p. 478) menciona que Riesz demostró que la respuesta a la convergencia en norma es afirmativa si $1 < p < \infty$, desde la función conjugada, concepto que proviene del análisis complejo a través de la armónica conjugada de la solución del problema de Dirichlet en el círculo. Para una función f cuya serie trigonométrica viene dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \, sen \, kx),$$

su función conjugada, $\tilde{f}$, es la que tiene como serie asociada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \, sen \, kx),$$

lo que permite inferir que si f está en L^2, también lo esta $\tilde{f}$ y recíprocamente. Riesz probó que lo mismo ocurre en L^p sí 1 < p < ∞. La convergencia en norma L^p de la serie de Fourier aparece como aplicación del resultado para la función conjugada. Para esta época apareció un artículo de Kolmogorov (1925, p. 26) en el que probaba una desigualdad débil para la función conjugada de una función de L^1:

$$\sup_{t>0} t\left|\left\{x: \left|\tilde{f}(x) > t\right|\right\}\right| \leq C\|f\|_1.$$

lo que permite inferir que la sucesión $\{S_N f(x)\}$ de sumas parciales de una función *f* integrable, converge en L^p para $0 < p < 1$.

Limitándonos al caso de las series de Fourier clásicas, esto es, al sistema trigonométrico, los nuevos marcos funcionales dieron lugar a dos problemas relacionados con la convergencia de funciones en L^p: ¿Es cierto que $\lim_{N\to\infty} \|S_N - f\|_p = 0$? y ¿se cumple $\lim_{N\to\infty} S_N f$ coincide con f en casi todo punto? El análisis funcional permite ver que la primera pregunta se reduce a probar la desigualdad:

$$\|S_N f\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

donde la constante C_p puede depender de p, pero no puede depender de f ni de N. Aparte de $p = \infty$ que, por ser de convergencia uniforme, se sabe que tiene respuesta negativa. Para $p = 1$ se excluye. la primera pregunta para $1 < p < \infty$ es afirmativa, como se mencionó anteriormente. Para la segunda, Kolmogorov[85] demostró que existe una función integrable cuya serie de Fourier diverge a todo punto, excepto en $p = 1$, donde es falsa. En 1915 Lusin conjeturó que la respuesta para p = 2 era afirmativa, problema que duró 50 años, hasta que en 1965 L. Carleson probó la conjetura de Lusin. De este teorema de Carleson se deduce que la serie de Fourier de una función continua converge en casi todo punto a la función, a pesar de ello en la actualidad no se tiene ningún método de demostración que no siga este camino. En 1967, R. Hunt mostró que el resultado de Carleson era válido para todo p > 1.

CONVERGENCIA PUNTUAL DE LA SERIE DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN DE L^2

Lusin[86] publicó en 1913 una condición necesaria y suficiente para la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función de L^2. Lo hizo viendo que la serie de Fourier de f converge en casi todo punto si y sólo si se cumplen simultáneamente c.t.p.[87]

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)}{2\,tan\left(\frac{t}{2}\right)}\; dt = f(x) \quad [*\, 2]$$

y

[85] Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903-1987), matemático ruso que realizó aportes en teoría de probabilidad y topología.

[86] Nikolái Nikoláyevich Luzin (1883-1950), su apellido se ve frecuentemente escrito como Lusin, matemático ruso. Investigó sobre teoría de conjuntos y los aspectos topológicos del análisis matemático.

[87] La abreviatura c.t.p. indica que cierta propiedad se tiene para casi todo punto excepto en un conjunto de medida cero.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)}{2\, tan\left(\frac{t}{2}\right)} \cos nt \ dt = 0, \quad [* 3]$$

Con $\tilde{f}$ la función conjugada de *f*. Las integrales en cero se entienden como valor principal. Probó que $[* 2]$ se cumple para toda función de L^2, con lo que $[* 3]$ quedó como única condición necesaria y suficiente. Plancherel (1924. p. 26) indicó que "esta condición no es simple e ignoramos si la serie de Fourier de una función continua o de una función de cuadrado integrable tiene necesariamente puntos de convergencia y si su conjunto es de medida positiva". Ahora bien, satisfecha la condición $[* 2]$ Lusin indica que es "infinitamente probable" que lo mismo ocurra con $[* 3]$. Su argumento se basa en que la existencia de la integral en $[* 2]$ es debida a la anulación y no al tamaño, y que como $\cos nt$ tiene valores positivos y negativos uniformemente distribuidos, la anulación debería seguir aplicándose por igual. Lo que genera la conjetura de Lusin: *la serie de Fourier de una función de* L^2 *converge en casi todo punto*.

En la época en que Lusin fue profesor de la universidad de Moscú lideró un grupo de investigación al que pertenecieron Aleksandrov *et al*. (1973), Suslin, Menshov, Khinchine, Urysohn, Kolmogorov, Bari, Lyusternik, Shnirelman y Novikov, entre otros. Los resultados más importantes sobre convergencia y divergencia puntual anteriores al teorema de Carleson aparecen en los primeros trabajos Kolmogorov, uno de los más destacados matemáticos del siglo XX y alumno de Lusin. Kolmogorov demostró en 1923 que existe una función integrable cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto y lleva la divergencia a todo punto. Demostró que "la convergencia lagunar[88] para funciones de cuadrado integrable: si

[88] En análisis complejo, una función lagunar o lacunar, también llamada serie lagunar es una función analítica que no puede extenderse analíticamente a ninguna región fuera del radio de convergencia en que está definida una serie de potencias que la representa.

$\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1$ y $f \in L^2$, entonces la sucesión $\{S_{n_k}f(x)\}$ converge a $f(x)$ en casi todo punto" (KOLMOGOROV, 1924, p. 97).

Para 1926 Lusin junto a Seliverstov presentaron como condición suficiente para la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\log n < +\infty$$

esta condición obtenida independientemente por Plessner, permaneció como mejor resultado conocido durante cuarenta años. La conjetura de Lusin permaneció sin respuesta y el tiempo hizo cambiar de opinión a los expertos en cuanto a su veracidad. Para 1935 Zygmund trabajó con series trigonométricas sin mencionar la conjetura de Lusin. Lo que si planteó fue que "el problema de la existencia de una función continua con serie de Fourier divergente en todo punto está todavía abierto" (ZYGMUND, 1971, p. 164). Fue hasta que Carleson (1966) probó que la conjetura de Lusin era cierta: la serie de Fourier de una función de L^2 converge en casi todo punto. Por tanto, también la de una función continua, que tampoco se conocía hasta entonces. Para 2006 el premio Abel fue otorgado a Lennart Carleson, el jurado destacó varios de sus resultados, resaltando el teorema de convergencia en casi todo punto de las funciones de L^2. Poco después Richard Hunt extendió el resultado de Carleson hasta cubrir el rango de todos los espacios L^p con p > 1. El teorema de Carleson con la extensión de Hunt presumió la cúspide de un camino que había empezado siglo y medio antes, dejando resueltas las grandes cuestiones sobre la convergencia de las series de Fourier.

LOS APORTES DE KOLMOGOROV, SELIVERSTOV, Y ZYGMUND

En el Primer Congreso Internacional de Matemáticas, realizado en Paris en 1900, David Hilbert planteó 23 problemas que definiría la investigación en matemáticas para el siglo XX, Muchos matemáticos destacados dedicaron su vida a responder a esos problemas. Entre ellos estaban Kolmogorov y Von Neumann. Kolmogorov estructuró el sistema axiomático de la teoría de probabilidad utilizando lenguaje de teoría de conjuntos, cuyos elementos son eventos. Trabajó en lógica constructivista; en las series de Fourier; en turbulencias y mecánica clásica. Fundó la teoría de la complejidad algorítmica. Entre algunos resultados destacados que llevan su nombre están: Ecuación de Fischer-Kolmogórov; Axiomas de Kolmogórov para probabilidad; Teorema de continuidad de Kolmogórov; Teorema de Fréchet-Kolmogórov; Teorema de superposición de Kolmogórov; Espacio de Kolmogórov; Paradoja de Borel-Kolmogórov. En los modelos clásicos Kolmogorov, introdujo una tripleta (Ω, F, P), donde Ω es el conjunto de todos los posibles resultados del fenómeno aleatorio (espacio muestral), F es la sigma álgebra de subconjuntos de Ω, llamados eventos. P es una medida de probabilidad sobre F, que actualmente todo está fundamentado en la Teoría de la Medida.

Por otro lado, Von Neumann[89], ingeniero químico y matemático de las universidades de Berlín, Zurich y Budapest. Fue profesor en las universidades de Berlín, Hamburgo y Princeton, en cuyo Instituto de Estudios Avanzados trabajó desde 1933. Adquirió la nacionalidad estadounidense en 1937. En marzo de 1955 fue nombrado miembro de la Comisión de Energía Atómica de los

[89] John Von Neumann (1903-1957), matemático húngaro-estadounidense que realizó contribuciones fundamentales en análisis funcional, análisis numérico, teoría de conjuntos, teoría de juegos, física cuántica, ciencias de la computación, economía, cibernética, hidrodinámica y estadística entre otros.

Estados Unidos. Fue pionero en la ciencia de los ordenadores, convirtiéndose en creador de la arquitectura de los ordenadores actuales, propuso la adopción del *bit* como medida de la memoria de los ordenadores, resolvió el problema de la obtención de respuestas fiables con componentes no fiables (*bit de paridad*). Participó en el diseño para construir un ordenador electrónico, replanteado gracias a su intervención; estableció las bases de su diseño, distinguiendo cuatro componentes principales: memoria, unidad aritmética-lógica, unidad de control, y dispositivos periféricos. Diseñó y construyó los primeros computadores para la universidad de Princeton, conocidos como el Johniac y el ENIAC, diseñados para calcular la trayectoria de proyectiles. Propuso separar el software del hardware. Este diseño se realizó en el ordenador EDVAC. Su inventiva computacional lo llevo a que durante la segunda guerra mundial fuera invitado a participar en el proyecto Manhattan, que desarrolló la bomba atómica, trabajó en el diseño del método de implosión para alcanzar la masa crítica del combustible nuclear, y en el desarrollo de la bomba de hidrógeno.

En álgebra desarrolló la teoría de operadores, que sustituyó a las matrices infinitas de Hilbert como base de la Mecánica Cuántica y abrió el camino hacia los espacios de dimensiones fraccionarias, propuso para el caso cuántico, el par (A, ϕ) donde A es un álgebra de Von Neumann (de operadores), las proyecciones son llamadas eventos y ϕ es un estado, probabilidad, sobre A. inicialmente su planteamiento solo cubría algunas ideas fundamentales de lo que se podría llamarse *Teoría de la Medida no-conmutativa*, en que la noción de variable aleatoria, proceso estocástico, probabilidad y esperanza condicional, cadenas de Markov y procesos de Markov estaban ausentes en este sistema. Demostró que las dos formulaciones de la Mecánica cuántica, la de Heisenberg y la de Schródinger son equivalentes. En 1932 ideó una forma frágil del teorema ergódico, relacionado con la *Mecánica estadística*, que trata de resolver, *mediante aproximaciones lineales* *decisiones no lineales*, el problema de la evolución de un sistema de partículas sujetas a la acción de la gravedad. El teorema Ergódico expone: Sea X un espacio métrico completo y separable, $T: X \to X$ una transformación medible, μ una probabilidad $T - invariante$, y $f: X \to \mathbb{R}$ una función medible y $\mu - integrable$. Entonces para $\mu - casi$ todo $x \in X$ existe el límite

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)).$$

la función $\tilde{f}$ así definida cumple $\mathbb{E}_\mu(f) = \mathbb{E}_\mu(\tilde{f})$. Además si μ es una medida ergódica para T entonces $\tilde{f}(x) = \mathbb{E}_\mu(\tilde{f})$ para $\mu - casi$ todo $x \in X$.

Existen diferentes demostraciones de este teorema, comparto la realizada Lessa (2009, p. 03) porque contiene argumentos sencillos que permiten demostrar el teorema asumiendo que la transformación T es ergódica para la medida μ y usando el lema de Karlsson y Margulis que permiten dar una demostración directa en el caso ergódico, veámosla:

Demostración: asume que Eμ(f)=0, el caso general se deduce de este caso aplicándolo a f−Eμ(f)). Luego aplica el lema de Karlsson y Margulis a $f +$, obtiene que el conjunto de los x tales que $f(x) + \cdots + f(T^n(x)) + n\epsilon \geq 0$ para todo n es de $\mu - medida$ positiva. Lo que implica que el conjunto

$$A_\epsilon = \left\{x\epsilon\, X\colon \lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) \leq \epsilon \right\}$$

cumple $\mu(A_\epsilon) > 0$.

Como μ es ergódica y A es invariante se tiene $\mu(A) = 1$. Como esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, en particular los racionales, queda demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) \leq 0$$

para $\mu - casi$ todo x. El mismo argumento aplicado a $-f$ muestra que el lím inf es mayor o igual a 0 para $\mu - casi$ todo x. Con esto se concluye el teorema ≙.

Otro de sus campos de trabajo fue la *teoría de Juegos*, rama de las matemáticas que tiene importantes aplicaciones en economía, en la que descubrió *el teorema minimax en* 1928, que estudia la estrategia a seguir para minimizar las perdidas en cierta familia de juegos. También trabajó sobre el problema de la generación de *números seudo aleatorios, esto es* de *aleatoriedad repetitiva*, en un ordenador. Entre sus obras destacan: Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica, (*Mathematische Grundlagen der Quanten mechanik*, 1932), la Teoría de juegos y el comportamiento económico (*Theory of games and economic behavior*, 1944), escrito en compañía con el economista *Oskar Morgenstern sobre teoría de la utilidad esperada*. En este libro, los autores formularon la hipótesis de utilidad esperada en relación a la *aversión al riesgo*, que se analiza usando una *función de utilidad esperada* y describe el proceso de toma de decisiones. Desarrollaron un conjunto de axiomas bajo los que la hipótesis de la utilidad esperada se mantiene, y que hoy es conocido como *teorema de utilidad Von Neumann-Morgenstern*. Otra de sus grandes contribuciones fue a la *teoría de* *la decisión*, que hoy se conoce como el *teorema minimax*, como un método de decisión para *minimizar* la pérdida *máxima* esperada en juegos con adversario y con información perfecta; en otras palabras, minimax es un algoritmo recursivo.

La teoría de utilidad esperada aborda el análisis de situaciones donde los individuos deben tomar una decisión sin saber qué resultados pueden trascender de esa decisión; es decir, tomar decisiones bajo incertidumbre. Estos individuos elegirán el acto que dará lugar a la utilidad esperada más alta, siendo ésta la suma de los productos de probabilidad y utilidad sobre todos los resultados posibles. La decisión también dependerá de la aversión al riesgo del agente y la utilidad de otros agentes. La base de esta teoría son loterías o apuestas, notada como(L_n) cada una definida por todos los posibles resultados o consecuencias (C_1, C_2, …, C_n) y sus correspondientes probabilidades $(p_1, p_2, \cdots, p_i)$, considerando $\sum p_i = 1$.

$$EU(L) = U(C_2)p_1 + U(C_2)p_2 + \cdots + U(C_n)p_n$$

En este apartado es necesario recordar que el término *utilidad esperada* fue inicialmente introducido por Daniel Bernoulli, que lo utilizó para resolver la paradoja de San Petersburgo, porque el valor esperado no era suficiente para su resolución. Por ello, Bernoulli introdujo el término en su libro "*Exposición de una nueva teoría en la medición del riesgo*" (*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae) en* 1738, donde resolvía la paradoja. Sin embargo, von Neumann y Morgenstern en la *Teoría de juegos y comportamiento económico*, texto considerado la piedra angular de la teoría de la utilidad esperada; expresaron contribuciones y desarrollo de un establecimiento matemático para la solución de la paradoja de Bernoulli. Para ello, desarrollaron un conjunto de axiomas para las relaciones preferenciales con el fin de garantizar que la función de utilidad funcionaba correctamente.

Dieudonné[90], destacado por sus investigaciones en algebra abstracta, geometría algebraica particularmente en, la teoría de Galois de anillos semi simples, y la algebraización de los trabajos de Spohus Lie. En análisis funcional, tuvo participación en el grupo con seudónimo *Nicolas Bourbaki y los Éléments de géométrie algébrique Project* de Alexander Grothendieck, allí presentó trabajos sobre grupos clásicos y grupos formales, introduciendo lo que ahora se conoce como *modelos de Dieudonné*, expuestos en su libro *La Géométrie des groupes classiques* publicado en 1955. Sus aportes en Topología y topología algebraica aportaron las nociones de partición de unidad, espacio paracompacto y espacios vectoriales topológicos.

El libro *Historia del Análisis Funcional* presenta el análisis funcional como una mezcla bastante compleja de álgebra y topología, cuya evolución ha sido influenciada por el desarrollo de estas dos ramas de las matemáticas. El libro adopta una definición más estrecha, una que supone, satisface varias condiciones algebraicas y topológicas. Desde profundas reflexiones muestra que esto ya cubre gran parte del análisis moderno, en particular, la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales. El volumen consta de nueve capítulos, en el primero centrado en ecuaciones diferenciales lineales y el problema de Sturm-Liouville. Los capítulos siguientes continúan discutiendo las ecuaciones *criptointegrales*, incluido el principio de Dirichlet y el método Beer-Neumann; la ecuación de membranas vibrantes, incluidas las contribuciones de Poincaré y HA, el artículo de Schwarz de 1885; y la idea de dimensión infinita. Los otros capítulos contienen la definición del espacio de Hilbert, incluido el descubrimiento de Fredholm y las contribuciones

[90] Jean Alexandre Eugène Dieudonné (1906 –1992), matemático francés.

de Hilbert; la dualidad y la definición de espacios normados, incluyendo el teorema de Hahn-Banach y el método de la joroba deslizante y la categoría de Baire; la teoría espectral posterior a 1900, incluidas las teorías y trabajos de Riesz, Hilbert, von Neumann, Weyl y Carleman; espacios localmente convexos y la teoría de las distribuciones; y aplicaciones del análisis funcional a ecuaciones diferenciales y diferenciales parciales.

El análisis funcional surge y se desarrolla como ente propio a inicios del siglo XX, generado por la evolución del análisis clásico, de la física-matemática y de las nuevas ideas de algebra y geometría, muy ligadas a la topología. El objeto de estudio son las ecuaciones cuyas incógnitas son funciones que fueron consideradas por matemáticos de finales del siglo XIX, las ecuaciones diferenciales ordinarias y con derivadas parciales, las ecuaciones integrales, las ecuaciones integro diferenciales y otros tipos de ecuaciones funcionales. Es de resaltar el carácter dinámico que dio origen al nacimiento del cálculo infinitesimal, éste se acentuó y diversificó con la influencia de Riemann y Poincaré, quienes consideraron que lo que varía no son únicamente los números sino también las funciones, que llegaron a considerarse como puntos de un espacio, lo que conllevó a las diversas nociones de convergencia de una sucesión de funciones hacia una función limite, lo que condujo a la idea general de topología sobre un conjunto de funciones. Desde este tipo de razonamientos, Dieudonné planteó el análisis lineal global reconocido como una de las grandes creaciones matemáticas de los siglos XIX y XX. Lo que se observa es que se trata de una construcción compleja sobre problemas relativos a las ecuaciones lineales propias de la física matemática, entre ellas: La ecuación de Laplace $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$; La ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ donde $\Delta \equiv \nabla^2$ y representa el laplaciano, con c una constante que representa la velocidad de propagación de la onda; o la ecuación de calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, escritas para tres variables de espacio x, y, z y una de tiempo t, extensibles a más variables.

Es de resaltar que este estudio de forma sucesiva, dio origen a la teoria de las series e integrales de Fourier, mas tarde convertido en el *Análisis Armónico Conmutativo*; a la teoria del potencial newtoniano y de las funciones armónicas; a la teoria de Sturn-Liouville para ecuaciones diferenciales ordinarias; y a la teoría de las ecuaciones integrales lineales. Posteriormente con los aportes de Fredholm, apareció el espacio de Hilbert y la teoría espectral de operadores de esos espacios. Para 1950, la teoria de las distribuciones se generalizó y simplificó las ecuaciones lineales conllevando a la teoria de los operadores pseudodiferenciales y su extensión al analisis sobre variedades diferenciales.

En 1930, Gödel[91] en su tesis doctoral, deshizo la opinión de Hilbert sobre el problema de la consistencia al probar que desde unos axiomas no es posible demostrar su consistencia. Tres años antes, Heisenberg había señalado limitaciones a los físicos con su principio de incertidumbre; ahora Gödel hace algo similar con los matemáticos. En su tesis doctoral presenta el *Teorema de incompletitud*, donde afirma que, si unos axiomas son consistentes y pueden describir la Teoría de Números y la Aritmética, entonces habrá proposiciones indecidibles de las que no se puede demostrar ni su certeza ni su falsedad a partir de esos axiomas. Este resultado hizo pensar que algunas conjeturas no demostradas, como la Hipótesis de Riemann, podrían pertenecer a la clase de proposiciones formalmente indecidibles en un sistema axiomático consistente. El teorema de incompletitud hizo pensar a Hilbert en la posibilidad de un algoritmo o máquina capaz de indicar a los matemáticos si un

[91] Kurt Friedrich Gödel (1906-1978). Lógico, matemático y filósofo austríaco.

enunciado podía deducirse o no de unos axiomas, a este lo llamó *problema de la decibilidad*, recuerda su décimo problema de 1900, que preguntaba por la existencia de un método para saber si una ecuación diofántica tiene o no solución entera.

Max Newman, al ver deshecho el programa de Hilbert, se intriga por las ideas de Gödel, al punto que cinco años después explicó el Teorema de incompletitud. Turing[92], al oír a Newman sobre la dificultad de las demostraciones de Gödel intuye la inexistencia de una máquina que resolviese el problema de decibilidad propuesto por Hilbert. Turing se centró en obtener máquinas físicas capaces de enfrentarse a los problemas abstractos. Sus primeros resultados fueron máquinas teóricas, llamadas *máquinas de Turing*, que seguían nuestro comportamiento al hacer cálculos aritméticos y que son el antecedente teórico de los ordenadores. Turing demostró la inexistencia de un algoritmo capaz de determinar en un número finito de pasos si una de sus máquinas funcionando continuamente produciría o no un determinado número. Poco después utilizó la técnica de Cantor para probar que si una máquina de Turing fuese capaz de indicar si un conjunto de proposiciones era o no deducibles de un conjunto de axiomas, se podía construir una proposición que esa máquina no sería capaz de decirnos si era o no deducible del conjunto de axiomas, resolviendo de esta manera el problema de la decibilidad.

Después de resolver el problema de la decibilidad, Turing dirigió su investigación hacia la Hipótesis de Riemann. Influido por el pesimismo de Hardy, que pensaba que era una situación indecidible, se esmeró en usar máquinas para lograr ceros no triviales de la función zeta con el método de cálculo de Riemann y que había sido redescubierto por Siegel, con la esperanza de obtener algún cero complejo fuera de la recta crítica. Para ello adecuó una

[92] Alan Mathison Turing (1912-1954). Matemático, lógico, informático, criptógrafo, filósofo, y biólogo teórico británico.

máquina que era utilizada en la previsión de las mareas, para el cálculo de ceros no triviales de la función zeta. Su trabajo fue interrumpido por la Segunda Guerra Mundial, al finalizar de esta guerra, Turing comenzó a trabajar con Max Newman en Laboratorio de Cálculo de la Royal Society. Entre ambos construyeron una máquina calculadora programable para cálculos diversos. Con esta máquina Turing comprobó en 1950 que los 1.104 primeros ceros no triviales de la función zeta estaban situados sobre la recta $x = ½$, pero no consiguió su objetivo de probar la falsedad de la Hipótesis de Riemann. En la misma dirección Derrick Henry en 1956 comprobó que los 25.000 primeros ceros no triviales de la función zeta de Riemann están en la recta crítica[93] $x = ½$.

Durante el final de la resolución del décimo problema de Hilbert, Paul Cohen comenzó a trabajar en el primer problema de Hilbert, que proponía probar la hipótesis del continuo. Le bastó un año para demostrar en 1963 que desde los axiomas estándar de teoría de conjuntos no se puede demostrar ni refutar la hipótesis del continuo. Con este resultado Cohen consiguió deshacer el mito que las proposiciones indecidibles en el sentido de Gödel, que se trata de proposiciones «complejas y extrañas»; para 1970 ya se sabía que mediante el uso de computadores se había verificado que los primeros tres millones y medio de ceros no triviales de la función zeta están situados sobre la recta crítica, pero no veían razón suficiente para abandonar su escepticismo respeto a la Hipótesis de Riemann. Don Zagier, del *Max Planck Institut für Mathematik* y versado acerca de las limitaciones que tenían los ordenadores de los años setenta, afirmó que sería menos suspicaz respecto a la validez de la Hipótesis de Riemann si se comprobase que los trescientos primeros millones de ceros no triviales de la función zeta están

[93] La hipótesis de Riemann afirma que todos los ceros no triviales de la función zeta se encuentran en la recta $x = \frac{1}{2}$ denominada como *recta critica*. A la fecha se han calculado más de diez billones de ceros, todos alineados sobre la recta crítica, corroboran la sospecha de Riemann, pero nadie aún ha podido probar que la función zeta no tenga ceros no triviales fuera de esta recta.

situados sobre la recta crítica. Hoy se han calculo más de diez billones de ceros y todos están sobre la recta critica.

LOS APORTES DEL GRUPO DENOMINADO NICOLÁS BOURBAKI

El grupo Bourbaki[94], cuyo nombre fue adoptado por un grupo de matemáticos de diversas nacionalidades, principalmente franceses todos de inicios del siglo XX. Encargados de hacer documentación matemática, dado que la actual, para esa época, no tenía la suficiente estructura lógica, sus integrantes estaban interesados en ofrecer una visión moderna de las matemáticas contemporáneas que, al propio tiempo, enfatizara el componente axiomático de las mismas. Razón que los llevo a crear sus propios textos matemáticos bajo el pseudónimo de un personaje ficticio: Nicolás Bourbaki. El grupo fue fundado por algunos jóvenes matemáticos, de edades comprendidas entre los 24 y 30 años; la mayoría de ellos antiguos alumnos de *L'Ëcole Normale Superieur* de Paris. Existía la norma que sus integrantes no podían pertenecer más al colectivo cuando superaran los 50 años de edad.

El colectivo Nicolás Bourbaki desde su nacimiento a mediados de los años 1930 hasta mediados de los años 1967 influyó decisivamente en el desarrollo y la evolución de las matemáticas contemporáneas. Su influencia fue más allá de las matemáticas, ya que jugó el papel de intermediario cultural entre los distintos ámbitos en los que se desarrolló la amplia corriente de pensamiento que recibe el nombre de estructuralismo, desde la lingüística y la antropología hasta la economía y la psicología. El título de *Eléments de Mathématique*, tenía como objetivo la exposición, de forma

[94] Grupo de matemáticos franceses cuyo seudónimo fue Nicolás Bourbaki y cuya existencia estuvo entre 1939 a 1967.

sistemática y rigurosa, las nociones y herramientas básicas para el desarrollo de toda las Matemáticas.

Es de aclarar que durante el siglo XX se habían estructurado un conjunto de problemas matemáticos que desde una perspectiva filosófica se podían considerar como cruciales en los que es posible distinguir dos demonios: los concernientes a la ontología y los relacionados con la epistemología de la matemática misma. Por su evolución se observa que tanto los problemas ontológicos como los epistemológicos estaban coligados a la noción de verdad y que el efecto de dicha compenetración es la imposibilidad de proporcionar una explicación plausible de la ontología y la epistemología de la matemática si no se tiene una comprensión adecuada de la verdad matemática. La posibilidad de dilucidar correctamente la relación entre las asunciones ontológicas sobre objetos matemáticos, con una teoría del conocimiento matemático y con la verdad de los enunciados matemáticos generó una dificultad crucial para comprender la naturaleza de las matemáticas. Esto ha llevado a considerar que su explicación satisfactoria debe mostrar que la teoría de la verdad, la ontología y la epistemología en matemáticas son compatibles entre sí. De ahí que surge una vertiente conocida como *el estructuralismo matemático*[95], como una respuesta de diversas escuelas filosóficas que procuran dar cuenta de la posible compatibilidad entre la verdad matemática y el conocimiento matemático, principalmente dando explicación sobre la ontología matemática, esto es, sobre el estatuto y naturaleza de las entidades matemáticas.

El estructuralismo matemático no es algo nuevo; fue sostenido, aunque no explícitamente y nombrado de ese modo, por Dedekind y Peano en sus respectivos análisis acerca de los números. Los dos contribuyeron al desarrollo de los axiomas de la aritmética

[95] El estructuralismo matemático es considerado en Filosofía de las Matemáticas como una ciencia que se ocupa de las estructuras generales, es decir, las relaciones de los elementos dentro de un sistema.

elemental, consistente en unas pocas reglas a partir de las cuales se puede generar la sucesión de números naturales. Lo especial de estos axiomas es que llevan a pensar en una *estructura*, a saber, la estructura numérico natural, como un sistema de relaciones entre elementos cuya naturaleza nos es indiferente, podría haber diferentes modelos, con diferentes elementos, que satisfacen los axiomas. Dedekind lo enuncia así:

> Si en la consideración de un sistema simplemente infinito N ordenado por una transformación φ descartamos enteramente el carácter especial de los elementos, reteniendo simplemente su distinguibilidad y teniendo en cuenta solo las relaciones mutuas en que la transformación ordenadora φ los coloca, entonces esos elementos se llaman *números naturales* o *números ordinales* o simplemente *números*. Las relaciones o leyes que se derivan enteramente de las condiciones iniciales son, por lo tanto, siempre las mismas en todos los sistemas simplemente ordenados, cualesquiera nombres suceda que se les dé a los elementos individuales, ellos constituyen el objeto primero de la *ciencia de los números* o *aritmética* (DEDEKIND, 1901, p. 33).

De esta forma, los números naturales no son más que cualquier cosa que opere como elemento de esa estructura: los números serían solo aquello que en cualquier progresión toma una posición que la relación de orden le asigna. Así, los números no son ningún objeto en particular sino, en general, todo aquello que cumple la función de un numero en una progresión; por tanto, ser un número no es ser un *objeto abstracto* sino cumplir una función y tomar una posición en una estructura. Esta es una de las tesis fundamentales del estructuralismo. La visión de Dedekind se ve reforzada al mirar los axiomas de la aritmética, que determinan en sentido estricto, la mencionada estructura numérico-natural. En forma similar el conjunto de los cinco axiomas no lógicos de la aritmética, comúnmente llamados axiomas de Peano, aunque aparecían implícitos en la teoría de números de Dedekind, ha de considerarse un conjunto de enunciados caracterizadores de cualquier estructura progresiva cuyo tipo de orden es el orden natural de una estructura que será llamada secuencia de los números naturales. Es importante aclarar que todo modelo de estos axiomas debe constituir una estructura *isomorfa* con las demás, de tal modo que la secuencia de los números naturales sea rigurosamente la estructura común a todos sus modelos; situación que configura la segunda tesis del estructuralismo.

De esa manera, las estructuras son constructos resultantes de unas reglas de construcción. En cuanto tales, los axiomas estipulan qué propiedades posee el tipo de estructura que ellos determinan, que vienen a ser las propiedades de las relaciones definidas entre un conjunto de elementos cuya naturaleza es indiferente. En expresión de los Bourbaki:

> Ahora podemos hacer comprender lo que, de una manera general, debe entenderse por una *estructura matemático*. El rasgo común de las diversas nociones agrupadas bajo ese nombre genérico es que se aplican a conjuntos de elementos cuya naturaleza *no está especificada*; para definir una estructura, se dan una o varias relaciones en las que intervienen estos elementos […]; se postula luego que la o las relaciones dadas satisfacen ciertas condiciones (que se enumeran) y que son los axiomas de la estructura considerada. Hacer la teoría axiomática de una estructura dada es deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura, *con exclusión de toda otra hipótesis* acerca de los elementos considerados

> (en particular, toda hipótesis sobre su naturaleza propia) (BOURBAKI,1950, p. 228-229).

Para ellos el siguiente paso era explicar lo que denominan "*arquitectura*" de las matemáticas, rotulo con el que enmarcaron su visión de conjunto de las matemáticas entendidas como *ciencias sobre estructuras*. Dicha arquitectura es representable, desde una jerarquía de estructuras. Y como toda jerarquía, esta sobre una base constituida por estructuras elementales, y a partir de ella se da una complejización creciente, de lo general a lo particular. Determinan la existencia de tres tipos de estructuras matemáticas básicas denominadas *estructuras madre,* estas son: estructuras algebraicas,

estructuras de orden y estructuras topológicas. Las leyes que determinan cada tipo de estructura madre son cierto tipo de axiomas. Las estructuras algebraicas, como los grupos, cuerpos y anillos, son determinadas por leyes de composición; las estructuras de orden, como las progresiones y series, por leyes de ordenamiento y las estructuras topológicas, como los espacios y subespacios, por leyes de proximidad, limite y continuidad. A partir de cada una de las estructuras madre se obtienen nuevas estructuras que suplementan su conjunto de axiomas con otros nuevos, de los cuales se seguirán otras consecuencias lógicas. Posteriormente se generan nuevas estructuras combinando estructuras de orden con estructuras algebraicas, y nuevas combinaciones de axiomas de esas estructuras derivadas darán como resultado más estructuras complejas nuevas. El grupo Bourbaki observa que, en la jerarquía de estructuras matemáticas, las estructuras estudiadas por las teorías clásicas como el análisis funcional, la geometría diferencial o la teoría de números ya no eran vistas como teorías de estructuras autónomas sino de estructuras encrucijadas, al punto mencionan: "[…] donde se cruzan y actúan unas sobre otras numerosas estructuras matemáticas más generales" (BOURBAKI, 1950, p. 226).

La visión bourbakista sobre la arquitectura de las matemáticas y su unidad epistémica a partir de las estructuras, fue históricamente opacada durante la primera mitad del siglo XX, fue necesario esperar hasta finales del mismo siglo para que el programa estructuralista se constituyera en una escuela filosófica legítimamente constituida; entre sus principales representantes se considera a Michael Resnick y Stewart Shapiro. Conforme al enfoque estructuralista no hay objetos con estructura interna, solo posiciones en estructuras, y tales posiciones carecen de identidad o de características por fuera de esa estructura. Resnick, en particular, se apoya en la idea que, al concebir los objetos matemáticos de manera aislada, se tienen dificultades para responder al problema de cómo tenemos conocimiento de ellos en términos de *interacción causal*; en uno de sus escritos plantea: "Me resulta más sugestivo, por propósitos epistemológicos, hablar de patrones matemáticos y sus posiciones más que de estructuras. Veo los patrones y sus estructuras como *entidades abstractas*" (RESNIK, 1981, p. 530).

Situación que conduce a pensar que los números sean a la vez conjuntos y puntos. O también la geometría puede ser interpretada aritméticamente, y no por ello se reducen ontológicamente los puntos a los números, a pesar que los patrones de la aritmética y la geometría son modelables entre sí al tomar esto como criterio de reducción ontológica, tras el hecho de modelar la geometría en la aritmética los puntos serian números y al modelar la aritmética en la geometría los números serian puntos, pero con esto no sabríamos *que son* esos elementos en realidad, si solo *hay* números o si solo *hay* puntos. Lo que nos lleva a entender que no se trata de cómo las interpretaciones modelistas aseguran que dos teorías tienen la misma ontología, sino de cómo una estructura puede ser presentada en otra, cosa posible porque un patrón tiene una ocurrencia en otro patrón, de modo que la teoría del primero se reitera en la teoría del segundo, por lo que ese mismo patrón puede tener múltiples ocurrencias en otros patrones.

El estructuralismo de Resnick es formulado de tal modo que debe suponer que las estructuras constituyen la ontología última de las matemáticas, pues las estructuras relativizan los objetos matemáticos a sus posiciones internas, pero ellas mismas habrán de ser tomadas como presupuestos ontológicos fundamentales de las matemáticas. Shapiro, sin embargo, no está completamente de acuerdo con Resnick en que las estructuras sean la ontología fundamental de las matemáticas, y opta por una variante del estructuralismo llamada *estructuralismo eliminativo,* que define como un *estructuralismo sin estructuras*: al respecto plantea: "Hablar, en general, de estructuras es una abreviación conveniente para hablar de sistemas. Un lema para el programa podría ser 'el estructuralismo sin estructuras'" (SHAPIRO, 1983, p. 525).

Bajo estas premisas el grupo Bourbaki publicó entre 1939 y 1967, una serie de estudios que formaban un proyecto de investigación enciclopédico con el título *Eléments de Mathématique*. Su objetivo era la realización de una de las propuestas que Hilbert planteó en 1900 cuando postuló que era necesario axiomatizar las matemáticas y asentar sus bases utilizando modelos algebraicos y no solamente intuitivos. El colectivo Bourbaki adoptó este principio como fundamento de su trabajo, contribuyendo de manera fundamental a la difusión de la concepción moderna de las matemáticas basada en la lógica y en la teoría de conjuntos. Su actitud respondía a un sentimiento de frustración y protesta por la situación de las Matemáticas en Francia. Alrededor de 1900 la matemática francesa estaba en una época de plenitud y, junto con la alemana, lideraba la matemática mundial. Matemáticos como Henri Poincaré, Jacques Hadamard, Émile Picard, René Baire o Henri Lebesgue estaban en su plenitud científica. En *Las Memorias* de André Weil planteó el daño causado a las Matemáticas francesas por la guerra. Manifiesta que aniquiló a toda una generación de muchachos franceses, mientras que los alemanes tomaron medidas para salvaguardar a las élites de sus jóvenes científicos de la muerte, reservándolos a posiciones alejadas del frente de guerra. En el mismo sentido se manifiesta Jean Dieudonné, durante muchos años portavoz del grupo Bourbaki, quien en una entrevista declaró:

> Los matemáticos muertos en la guerra son los que tenían que haber continuado los trabajos de Poincaré o de Picard. Mi generación se resintió duramente de las consecuencias de esta interrupción […] Mis profesores tenían veinte o treinta años más que nosotros, conocían sobre todo las matemáticas de su juventud y no nos enseñaban las nuevas teorías […] (DIEUDONNÉ, 1978b, p. 15).

Según cuenta André Weil en su autobiografía, al regreso de vacaciones de verano en 1934 reanudó sus tareas docentes en Estrasburgo junto con su colega Henri Cartan, ambos encargados del curso Cálculo Diferencial e Integral. Tradicionalmente usaban como texto guía el libro de Goursat, que ninguno de los dos hallaba agradable, por su estilo demasiado prolijo, con teoremas que se repetían a veces, con hipótesis superfluas y con ausencias destacadas, como la teoría de integración de Lebesgue. Esto dio lugar a continuas consultas mutuas sobre cómo desarrollar tal o cual tema. A finales de 1934, Weil planteó a su compañero Cartan: “Somos cinco o seis amigos encargados de la misma asignatura en distintas universidades, reunámonos y arreglemos esto de una vez por todas” (WEIL, 1991, p. 98) de esta forma nació el grupo Bourbaki cuyos integrantes fueron Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, René de Possel y André Weil, considerados los padres fundadores del grupo.

Beaulieu (1993, p. 28) menciona que Weil estableciendo que el objetivo era “fijar para los próximos 25 años los contenidos del certificado de cálculo diferencial e integral, mediante la redacción colectiva de un tratado de Análisis, tan moderno como fuera posible”. La propuesta significó una ruptura del grupo con los textos usados. El proyecto propuso iniciar con los fundamentos a las funciones analíticas y las ecuaciones en derivadas parciales. Con el objeto de fijar un plan global y discutir los informes previos con la amplitud necesaria, el Comité acordó dedicar dos semanas de las vacaciones de verano para reunirse en un lugar apropiado. Entre el 10 al 17 de julio de 1935 tuvo lugar el Primer Congreso fundacional del Bourbaki en un local de la universidad de Clermont-Ferrand en Chandesse. Dieudonné propuso elaborar un tratado que contuviera, de forma clara, precisa y sistemática, los teoremas y resultados básicos para todas las teorías existentes en matemática pura. Aparentemente, no se trató nunca la posibilidad de incluir la matemática aplicada, porque según Dieudonné, por la falta de interés y competencia en el tema de los colaboradores, aunque en algún momento se consideró la idea de incluir teoría de probabilidad y análisis numérico, pero luego se desechó. A raíz del éxito de ventas de los volúmenes de los *Éléments*, el grupo se dota de una estructura oficial para gestionar los diversos problemas prácticos: la Asociación de Colaboradores de Nicolas Bourbaki, creada en 1952.

Para este grupo de matemáticos franceses se observa la influencia planteada años atrás por Gauss, plasmando que cada vez se hacía más evidente que la clasificación tradicional de las Matemáticas resultaba inadecuada. En efecto, el punto de vista clásico distinguía las distintas ramas de las matemáticas según la naturaleza de los objetos que estudiaban: La aritmética era la ciencia de los números; la geometría estudiaba los objetos en el espacio; el análisis estudiaba las funciones, etc. Sin embargo, cada vez con mayor frecuencia, técnicas y resultados de una de estas áreas de las matemáticas, se mostraban útiles en otras áreas. Así, a lo largo del siglo XIX fue poniéndose en evidencia que lo relevante no era la naturaleza de los objetos estudiados, sino las relaciones entre ellos. Fueron surgiendo las primeras estructuras algebraicas, grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales, que permitían agrupar bajo una misma denominación conjuntos formados por elementos de naturaleza muy distinta, pero que gozaban de una serie de relaciones y propiedades comunes. Nociones que permitieron explicar semejanzas advertidas entre teorías aparentemente distintas.

Antes de Bourbaki ya habían aparecido algunos textos en áreas concretas de las matemáticas redactados con esta visión estructuralista. Uno de ellos, con gran influencia en el desarrollo posterior del Análisis Funcional, fue *Théorie des Opérations Linéaires*, publicado en 1932 por Stefan Banach, en el que recogió desarrollos fundamentales de la teoría de espacios normados en la década de 1920-1930. Pero la obra que más influyó en los primeros bourbakistas fue, sin duda, *Moderne Algebra* de L. van der Waerden, publicada en 1930, obra que tuvo un enorme impacto y contribuyó decisivamente a la adopción casi universal del punto de vista estructural en la organización y desarrollo del álgebra. Los fundadores de Bourbaki fueron admiradores de la escuela alemana de matemáticas, conocían y admiraban el libro de Van der Waerden, hasta el punto que lo tomaron como modelo para su estilo de redacción (ver DIEUDONNÉ, 1978, p. 19). Su objetivo era claro, someter todas las matemáticas al esquema de Hilbert. Lo que Van der Waerden había hecho con el álgebra, creían que tenía que hacerse con el resto de las matemáticas.

Para ello, como se mencionó anteriormente, desde el estructuralismo distinguió tres tipos básicos de estructuras consideradas fundamentales: algebraicas, de orden y topológicas, yendo de menor a mayor grado de abstracción necesario para la formulación de sus axiomas. A partir de estos tres tipos de estructuras, crearon estructuras compuestas por una o más estructuras llamadas simples, sobre un mismo conjunto, relacionadas a través de ciertos axiomas de compatibilidad. Así presentan las estructuras de grupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial topológico, la de espacio de medida o la de variedad diferenciable, por poner algunos ejemplos. El método axiomático y la organización en términos de estructuras matemáticas permitía al matemático una considerable economía de pensamiento. Tan pronto como se reconoce que los objetos bajo estudio satisfacen los axiomas de una cierta estructura, se dispone inmediatamente del arsenal completo de resultados generales conocidos para esa estructura, sin tener que demostrarlos de nuevo en cada caso particular. Sin embargo, nada más lejos de la concepción de Bourbaki que reducir las matemáticas a un:

> [...] juego puramente mecánico de fórmulas aisladas; más que nunca, la intuición domina en la génesis de los descubrimientos. Pero, además, [el matemático] dispone ahora de la poderosa maquinaria suministrada por la teoría de los grandes tipos de estructuras; con una sola ojeada, barre inmensos dominios, unificados ahora por el método axiomático, en los que antes parecía reinar el caos más completo (BOURBAKI, 1948, p. 10).

Para Bourbaki,

> El matemático no trabaja como una máquina o como un obrero en una cadena de montaje. Nunca se insistirá demasiado en el papel fundamental que juega en sus investigaciones una forma especial de intuición, que no es lo que vulgarmente se entiende por esta palabra, sino más bien una especie de adivinación (más allá de todo razonamiento) del comportamiento normal que se puede esperar de los entes matemáticos. Y cuando el investigador descubre súbitamente una estructura en los fenómenos que está estudiando, es como una

> modulación repentina que orienta de golpe en una dirección inesperada el curso intuitivo de su pensamiento, e ilumina con una nueva luz el paisaje matemático en el que se mueve (BOURBAKI, 1948, p. 10).

Por otro lado, la insistencia de Bourbaki de mantener siempre una terminología rigurosamente correcta a lo largo de toda su obra, condujo con frecuencia a una cierta vanidad e ilegibilidad del texto. Aspecto desmedidamente formal y abstracto, buscando siempre el rigor extremo y la máxima generalidad, esta fue una de las acusaciones frecuentes a los *Éléments*. Pero no olvidemos que la motivación inicial del grupo era romper con la forma de hacer los tratados usuales de matemáticas de comienzos del siglo XX. Además, una rápida excursión a cualquier biblioteca de matemáticas permite observar que hay muchos libros considerablemente más formales que los de Bourbaki, con una densidad de símbolos por decímetro cuadrado mucho más elevada. En cuanto a la generalización, citemos a Borel (1978):

> Contrariamente a mis primeras impresiones […] el objetivo del tratado no era la máxima generalidad, sino la más eficaz para responder a las necesidades de los usuarios potenciales en distintas áreas. Los refinamientos de teoremas que parecían sobre todo atraer a los especialistas, sin aparentemente aumentar sustancialmente el dominio de las aplicaciones, eran con frecuencia descartados (BOREL, 1978, p. 376).

Tampoco hay que ocultar que la obra de Bourbaki influyó la forma de enseñar matemáticas, con resultados no siempre positivos, casi que se institucionalizó a nivel mundial el llamado paradigma formal-mecanicista, que tanto ha sido criticado desde finales del siglo XX e inicios del XXI. De todas formas, no se puede negar la influencia que tuvieron los Bourbaki en la evolución de los contendidos de los programas de matemáticas en los distintos niveles educativos. En el caso de la enseñanza universitaria, es claro que este objetivo estaba ya presente desde la misma creación del grupo, y los miembros iniciales se dedicaron intensamente a tratar de "modernizar" la enseñanza de las matemáticas en las universidades francesas.

Por otro lado, a partir de los 1950 se produce en el mundo una serie de grandes cambios culturales, acompañados por un enorme desarrollo de la ciencia y la tecnología, junto con el acceso masivo a la enseñanza de las nuevas generaciones. La idea de que las matemáticas, como lenguaje científico por excelencia, está por todas partes y son esenciales para la formación y la cultura general de cada uno. Situación que hizo plantear la tarea de transmitir unas matemáticas universales y democráticas, sin atender a prerrequisitos de orden cultural. La idea era no presentar el saber matemático desde el comienzo, como un gran edificio unificado y, claramente, las matemáticas al estilo Bourbaki se adaptaban mejor a este proceso. El movimiento de reforma de las matemáticas modernas se extendió por todo el mundo: Los cambios de programa se fueron introduciendo en los Estados Unidos desde mediados de los años 1950; En Suiza la reforma comenzó en 1958. En la Unión Soviética se produjo de la mano de A. Kolmogorov, en 1970. En Francia los nuevos programas se establecieron a partir de 1969, etc. De esta forma se extendió de manera universal.

Hacia finales de la tercera década del siglo XX se observaron cambios profundos en muchos aspectos de la vida cultural y científica, caracterizados por la búsqueda de nuevos paradigmas y la ruptura con la historia anterior. La imagen del universo soportó un cambio radical con la aparición de la Teoría de la Relatividad y la Mecánica cuántica; La continua ruptura con el pasado y el énfasis puesto en el estudio de las relaciones de interdependencia entre los elementos que forman parte de una disciplina dio origen a una nueva corriente de pensamiento que fue dominante en Occidente a mediados del siglo XX, como ya se mencionó: El Estructuralismo. Esta filosofía propuso encontrar la estructura oculta de los datos o fenómenos estudiados, en lugar de dar una simple descripción de los mismos.

Con este panorama que pareciera fructífero al modelo de los Bourbaki, la realidad mostró que no era así, su declive fue pronto, se dio a mediados de 1970; las razones fueron muchas y variadas. Por otro lado, en esa época se produjo, permítanme decirlo de esta manera, otra estampida en la producción matemática, para 1979 la clasificación del *Mathematical Reviews* registraba 61 disciplinas y 3.400 subdisciplinas, una estimación de Ulam[96], citada en Davis *et al*. (1982, p. 33) promediaba en más de 200.000 teoremas nuevos anuales, los aparecidos en matemáticas en la década de los 70 del siglo XX. Naturalmente se percibía una necesidad de especialización que afectó a los miembros individuales del grupo, unido a la creciente actividad investigadora de muchos de ellos. De esa forma el tiempo dedicado a la obra colectiva, fue cada vez menor. Lo que si quedó a salvo fueron las *Exposés* de los Seminarios que se siguen realizando en el Instituto Henri Poincaré. A lo largo de más de casi cuatro décadas, Bourbaki fue referencia fundamental en el desarrollo de las matemáticas del siglo XX.

[96] Un Número de Ulam es un miembro de una secuencia entera, fue concebida por el matemático polaco Stanislaw Ulam y publicada en SIAM Review en 1964. La secuencia estándar de Ulam comienza con $U_1=1$ y $U_2=2$, siendo los primeros dos números de Ulam.

EL ANÁLISIS NO ESTÁNDAR DE ROBINSON

En 1966 Robinson[97] publica su libro *Non-Standar Analysis* en el que plasma y desarrolla la teoría necesaria para dar rigor a los números infinitesimales e infinitos dentro del Cálculo Infinitesimal. mediante el uso de lógica matemática de primer orden y la Teoría de modelos desarrolló una extensión del cuerpo de los números reales y que denominó *transformación* $*$ de $\mathbb{R}$, lo nombró *el cuerpo de los números hiperreales* notados $*\mathbb{R}$, en el que construyó tres nuevos tipos de números: infinitesimales o hiperpequeños, infinitos o hipergrandes y los apreciables.

Estableció que todo número hiperpequeño no nulo ε, se puede invertir y el resultado es el número $\omega = \frac{1}{\varepsilon}$. Para el número hipergrande ω se aplica que $|\omega| < m$ para *todo* m $\in \mathbb{N}$. Si ω es positivo se puede calcular $m < \sqrt{\omega} < \frac{\omega}{2} < \omega - 1 < \omega < \omega + 1 < 2\omega < \omega^2$. También se tiene que $(\omega + 1) \cdot (\omega - 1) = \omega^2 - 1$, o $(\omega + 1) + (\omega - 1) = 2\omega$, que no es cierto para el infinito (∞), dado que no es considerado un número en absoluto.

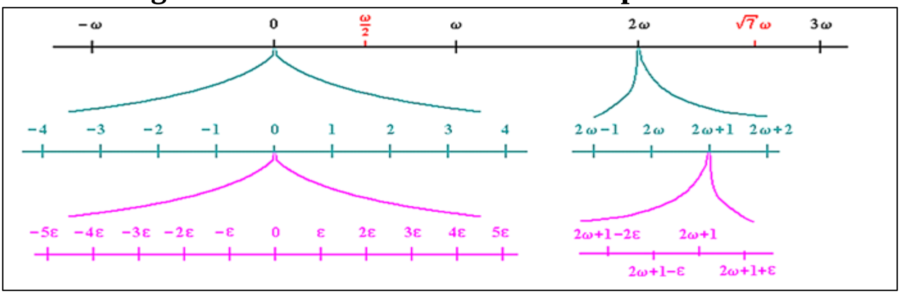
- Un número $x \in *\mathbb{R}$ es infinitesimal positivo o negativo si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, y $|x| < \frac{1}{n}$, es decir, x es un número más pequeño que cualquier número real positivo, exceptuando el número cero que es posible considerar como infinitesimal. También se puede decir que x es un número infinitesimal si su inverso: $\frac{1}{x}$ es un infinito;

[97] Abraham Robinson (1918- 1974) matemático alemán nacionalizado en Estados Unidos, conocido por el desarrollo del análisis no estándar, como un sistema matemáticamente riguroso por el que los números infinitesimales e infinitos se reincorporaron a las matemáticas modernas.

- Un número $x \in *\mathbb{R}$ es infinito positivo o negativo si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, se tiene que $|x| > n$, es decir, x es mayor que cualquier número real positivo;
- Un número $x \in *\mathbb{R}$ es un número real ordinario o estándar si $x \in \mathbb{R}$ (números reales), y se le llama estándar porque pertenece a los clásicos números reales;
- Un número $x \in *\mathbb{R}$ es apreciable si está formado por la suma de un número real ordinario denominado parte estándar de x con un infinitesimal positivo o negativo, es decir $x = r + \lambda$, con $r \in \mathbb{R}$ y $\lambda \approx 0$ (un infinitésimo positivo o negativo).

La cuarta definición permite visualizar en la recta geométrica a todo real ordinario r, rodeado de todos los números hiperreales que están próximos a él. De manera intuitiva es posible considerar a x, como $x = r + \lambda$, semejante a un "átomo", donde a r se le puede considerar el núcleo y al variar λ con diferentes infinitesimales, se obtienen los diferentes electrones del átomo. Dicho esto, considerando a ε un infinitesimal cualquiera y a ω un infinito cualquiera, gráficamente es posible visualizar los números hiperreales en la recta conforme la Figura 34.

Figura 34 - Ubicación de números hiperreales



Fuente: Adaptación tomada de Wikipedia enciclopedia libre.

En la última fila de color purpura se pueden ver los infinitesimales $(\cdots, -\varepsilon, -2\varepsilon, \varepsilon, 3\varepsilon, \cdots)$ que gravitan como los electrones entorno al núcleo $r = 0$; de forma analoga es posible utilizar, por ejemplo, al infinito $2\omega + 1$ de manera que los números hiperreales como $2\omega + 1 - 2\varepsilon$, $2\omega + 1 - \frac{\varepsilon}{4}$, o $2\omega + 1 + 2\varepsilon$,… estan cercanos a él y gravitan entorno a él como los electrones respecto al núcleo de un átomo. En el caso de cualquier número apreciable $x = r + \lambda$, basta cambiar el número real ordinario $r \neq 0$ en la fila rosa por cualquier número real $r \neq 0$, por ejemplo: r=1, r= 1,23456, r= 50.89, para obtener los diferentes números apreciables $r, r \pm \frac{\varepsilon}{4}, r \pm \varepsilon, r \pm \sqrt{\varepsilon}$ que gravitan entorno al número r (núcleo). Se logra fundamentados en un infinitesimal concreto, ejemplo ε y sus diversificaciones $\pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon, r \pm \sqrt{\varepsilon}$.

Si se elige otro infinitesimal ε^* se encuentran otros números apreciables distintos, dado que al considerar la definición de número apreciable $x = r + \lambda$, dado un r (número real ordinario) concreto, se logra hacer variar λ con diferentes infinitesimales, la definición de número apreciable permite modificar, la manera en cómo se calculan los límites: al evaluar un límite siguiendo el método leibniziano, se obtiene una contradicción al asignar a dx el valor cero, al suponer la hipótesis $dx \neq 0$. Al evaluar la derivadas $\frac{dy}{dx}$ para la funcion $y(x) = x^3$ Robinson induce de igual forma que Leibniz hasta llegar al número apreciable $3x^2 + 3x\,dx + (dx)^2$. Para Robinson la derivada $\frac{dy}{dx}$ no es igual al resultado expuesto. Robinson crea una lógica matemática para ejecutar una extensión del cuerpo de los $\mathbb{R}$ a un ente nuevo, los números hiperreales ($* \mathbb{R}$), incluyó un nuevo predicado "St(.)" para representar lo que consideró "estándar" por lo que del número apreciable $3x^2 + 3x\,dx + (dx)^2$, opta por tomar solo la parte estándar $3x^2$, de esta forma evita el que se produzcan contradicciones de considerar al infinitesimal $dx = 0$ y $dx \neq 0$, de acuerdo al tipo de cálculo que se ejecute. De esta forma $\frac{dy}{dx}$ para la función $y(x) = x^3$ es $3x^2$ igual que el resultado de Leibniz, pero considera la parte estándar del número apreciable $\frac{dy}{dx} = St(3x^2 + 3x\,dx + (dx)^2) = 3x^2$ dado que $3x\,dx + (dx)^2$ son infinitésimos.

En términos generales es posible afirmar que al momento de evaluar límites dentro del análisis no estándar, del número logrado por manejo algebraico optamos por su parte estándar si es un número apreciable, si el número resultante es un infinitesimal ε la solución será cero, dado que es posible considerar ε como un número apreciable $0 + \varepsilon$, cuya parte estándar es cero. Si el número resultante es infinito entonces infinito positivo o negativo serán la solución.

Se deben distinguir los infinitos hiperreales ω de Robinson de la teoría de los números transfinitos de Cantor. Mientras que el Ánalisis Estándar trabaja con reales, Cantor desarrollo su teoría desde los números naturales. Aleph-cero, $\aleph_0$ no es el cardinal, el tamaño, del conjunto de los números naturales, pero si es un cardinal transfinito, mayor que cualquier número natural pero es el número transfinito más pequeño en la teoría desarrollada por Cantor. Cantor sólo se interesó en los números naturales y fue construyendo sus sucesivos Alephs: $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$ considerando la hipótesis del continuo que $Card\,(P(\mathbb{N}))^{146} = Card\,(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ pero considerar $\frac{\aleph_0}{8}$ o $\pi\aleph_0$ no tiene sentido en su teoría, dado que involucra producto por números reales distintos de los naturales.

Es posible concebir los números hiperreales como un conjunto infinito y estratificado de copias de un conjunto de números hiperreales limitados $\mathbb{L} = \lim(*\,\mathbb{R})$. Es de advertir que este conjunto contiene a todos los números reales ordinarios $\mathbb{R} \subset \mathbb{L}$, además de sus respectivos halos o mónadas. El halo o mónada de un número real x es un conjunto de números hiperreales infinitesimalmente cercanos a x^2.

$$monad(x) = \{y \in \mathbb{R}^{+}: x - y \; es \; infinitesimal \}$$

la noción de infinitesimal puede definirse rigurosamente en el lenguaje de la teoría de los números reales extendidas con el predicado *estándar*. De hecho, todos los números infinitesimales resultan ser todos los números hiperreales no nulos que configuran la mónada del número real 0:

$$\varepsilon \; es \; un \; infinitesimal \leftrightarrow \varepsilon \in monad(0)$$

el conjunto de los números reales junto con sus mónadas satisface la relación:

$$\mathbb{R} \subset \bigcup_{x \in \mathbb{R}} monad(x) \subseteq \mathbb{L}.$$

Para cualquier número infinitesimal defínase el número hiperreal no limitado $h_{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \notin \mathbb{R}$ una "copia trasladada" de $\mathbb{L}$:

$$\mathbb{L}_{h} := \left\{ x \in \mathbb{R} \; / \exists \; y \in \mathbb{R}: x = y + \frac{1}{\varepsilon} \right\}$$

finalmente, el conjunto de los hiperreales puede concebirse como el conjunto reunión de todas las copias trasladadas con la anterior:

$$*\, \mathbb{R} = \left(\bigcup_{\varepsilon} \mathbb{L}_{h_{\varepsilon}} \right) \cup \mathbb{R}$$

Existe otra opción ofrecida por la lógica matemática donde los números reales convencionales son una realización posible de la conocida teoría de primer orden de los números reales. Esta teoría consiste en un conjunto de axiomas expresables en lenguaje formal de primer orden. Esto es, los números reales usados para resolución de problemas propios del análisis matemático satisfacen dichos axiomas, todos los teoremas lógicamente deducibles y a partir de dichos teoremas mediante reglas de deducción propias del lenguaje formal. Si se modificaran los axiomas o se introdujera algún símbolo nuevo en el alfabeto básico del lenguaje formal original, se puede obtener un modelo que incluya números con las propiedades tradicionalmente atribuibles a los números infinitesimales. Situación que permite construir los números hiperreales manipulando únicamente el lenguaje lógico-formal que sirve de fundamento para esa construcción, esto es, los axiomas que el modelo buscado debe satisfacer. Es posible alcanzarlo a partir de una formalización axiomática de la teoría de conjuntos numéricos; algo similar a la expuesta por los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Desde esta teoría fue posible usar el teorema de compacidad de la lógica de primer orden para alcanzar un modelo con las propiedades deseadas. Ese modelo permitió añadir a los antiguos axiomas, otros nuevos para que la teoría fuera consistente con la anterior. En otras palabras, lo que Robinson inventó fue un nuevo predicado unario estándar. Visto desde el sentido de la teoría de modelos, el conjunto de los hiperreales también compone un modelo si se consideran los axiomas de la teoría de primer orden que precisa axiomáticamente los números reales. Pero es de aclarar que esa teoría no es lógicamente completa por lo que admite diversos modelos no isomorfos.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

ABEL, N. “Oplösning af et Par Opgaver ved Hjelp af bestemte Integraler. **Magazin for Naturvidenskaberne**, vol. 2, 1823.

ABEL, N. “Recherches sur les fonctions elliptiques”. **Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik**. vol. 2, n. 101, 1827.

ABEL, N. **Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l’équation générale du cinquième dégré**. Christiania: Groendahl, 1824.

ALEKSANDROV, A. *et al*. **La Matemática, su contenido, método y significado**. Madrid: Alianza Editorial, 1973.

ANDERSEN, K. “Cavalieri’s Method of Indivisibles”. **Archive for History of Exact Sciences**, vol. 31, n. 4, 1985.

ASHBAUGH, M. *et al*. “International Conference on the Isoperimetric Problem of Queen Dido and its Mathematical Ramifications”. *In*: BLISS, G. A.; GRAVES, L. M. (eds.) **Contributions to the Calculus of Variations, 1931-1932**. Chicago: University of Chicago Press, 2010.

BANACH, S.; STEINHAUS, H. “Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier”. **ICM.edu** [1918]. Disponible en: <www.icm.edu.pl>. Acesso em: 25/08/2023.

BEAULIEU, L. “A Parisian café and ten proto-Bourbaki meetings (1934-1935)”. **The Mathematical Intelligencer**, vol. 15, n. 1, 1993.

BERGADÁ, D. **La matemática renacentista**: Historia de la Ciencia. Barcelona: Editora Planeta, 1979.

BERGGREN, J. "Napolitani, P. Method and statics in Valerio: With editions of two early works (Italian)". **Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche**, vol. 2, n. 1, 1982.

BERNOULLI, J. "Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici des solutions des problèmes sur les isopérimètres". *In*: ANNEÉ, M. **Mémoires de l'Académie Royale des Sciences**. Paris: l'Imprimerie Royale, 1718.

BLÅSJÖ, V. "The isoperimetric problem". **The American Mathematical Monthly**, vol. 112, 2005.

BOBADILLA, M. **Desarrollo conceptual de la integral y la medida**: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico (Tesis Doctoral en Educación). Bogotá: Universidad del Valle, 2012.

BOREL, A. "Twenty-five years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973". **Notices of the A.M.S.**, vol. 45, n. 3, 1978.

BOS, H. **Redefining Geometrical Exactness**: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction. New York: Springer, 2001.

BOUCHARLAT, J. **Elements de Calcul Differentiel et de Calcul Integral**. Barcelona: Editora Llibres del Senderi, 1858.

BOURBAKI, N. "Foundations of Mathematics for the working mathematician". **Journal of Symbolic Logic**, vol. 14, 1948.

BOURBAKI, N. "The Architecture of Mathematics". **The American Mathematical Monthly**, vol. 57, 1950.

BOYER, C. **Historia de las Matemáticas**. Madrid: Alianza Universidad Textos, 1986.

BOYER, C. **History of the Calculus and its conceptual development**. Dover: Dover Publications, 1949.

BOYER, C. **Los matemáticos de la Revolución Francesa**: Historia de la matemática. Madrid: Alianza Editorial, 2010.

BUSS, R. **El uso de Newton de la regla de Hudde en su Desarrollo del cálculo** (Tesis Doctoral). Madri: Universidad de Saint Louis, 1979.

CAJORI, F. **A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse**. London: Court Publishing Company, 1919.

CALINGER, R. **A Contextual History of Mathematics**. Washington: Pearson College Div, 1996.

CARLESON, L. "Convergence and growth of partial sums of Fourier series". **Acta Mathematica**, vol. 116, 1966.

CARNOT, L. **Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal**. Paris: Courcier, 1813.

CARTWRIGHT, M. "Manuscripts of Hardy, Littlewood, Marcel Riesz and Titchmarsh". **Bulletin of the London Mathematical Society**, vol. 14, 1982.

CASCALES, B. *et al*. **Análisis funcional I**. Murcia: Ediciones Electolibris, 2018.

CAUCHY, L. **Cours D’Analyse. I partie**: Analyse Algébrique. Paris: L’imprimerie Royale, 1821.

CLAIRAUT, A. “Solution de plusieurs Problèmes où il s’agit de trouver des Courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée”. *In*: ANNEÉ, M. **Histoire de l'Académie royale des sciences**. Paris: Publication Details, 1734.

CLAUDE-ALPHONSE, V. **La vie et les travaux du baron Cauchy**: membre de l'académie des sciences. Paris: Gauthier-Villars, 1868.

CLIFFORD, A. “Rational Fluid Mechanics, 1687-1765”. *In*: EULER, L. **The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788**. Zurich: Springer, 1960.

COHEN, I. “The Case of the Missing Author: The Title Page of Newton’s Opticks, with Notes on the Title Page of Huygens’s Traité de la lumière”. *In*: BUCHWALD, J.; COHEN, I. (eds.). **Isaac Newton’s Natural Philosophy**. Cambridge: Mit Press, 1704.

COLLETE, J. **Historia de las matemáticas**. Madri: Siglo XXI, 1993.

CORMEN, T. *et al*. **Introduction to algorithms**. Boston: Third Edition, 2009.

D'ALEMBERT, J. **Mélanges de littérature, d'histoire, et de philosophie**. Amsterdam: Nabu Press, 1767.

DAVIS, P. *et al*. **Experiencia Matemática**. Barcelona: MEC y Labor, 1982.

DEDEKIND, R. “Ueber die Begrundung der Idealtheorie. Nachrichten aus der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften”. **Mathematisch-Physikalische Klasse**, vol. 2, 1901.

DESCARTES, R. **Geometria a Renato des Cartes**. Ámsterdam: Nabu Press, 1659.

DESCARTES, R. **La Géométrie**. París: Félix Alcan, 1637.

DIEUDONNÉ, J. “History of Functional Analysis”. **Mathematics Studies**, vol. 49. 1978a.

DIEUDONNÉ, J. **Abrégé d´histoire des mathématiques 1700-1900 I y II**. Haarlem: Hermann, 1978b.

ENGELSMAN, S. **Families of Curves and the Origins of Partial Differentiation**. Ámsterdam: Elsevier, 1984.

EULER, L. “De integratione aequationis differentialis”. **Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae**, vol. 6, 1753.

EULER, L. “Variae observationes circa series infinitas”. **Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae**, vol. 9, 1744.

FARFÁN, R.; GARCÍA, M. “El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico”. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, vol. 18, 2006.

FERMAT, P. **Lettre à Marin Mersenne**. Paris: Angot, 1643.

FOURIER, J. **Théorie analytique de la chaleur**. Paris: Jaques Gabay Editions, 1989.

FRASER, C. “D’Alembert’s Principle: The Original Formulation and Application in Jean d’Alembert’s Traité de dynamique (1743)”. **Centaurus**, vol. 28, 1991.

FRASER, C. “The Calculus as Algebraic Analysis: Some Observations on Mathematical Analysis in the 18th Centur”. **Archive for the History of the Exact Sciences**, vol. 39, n. 4, 1989.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Ámsterdam: Riedel, 1983.

GOURSAT, E. **Cours d’analyse Mathématique, Gauthier Villars**. Paris: Imprimeur Libraire, 1905.

GRATTAN-GUINNESS, I. “The Varieties of Mechanics by 1800”. **Historia Mathematica**, vol. 17, 1990.

GRATTAN-GUINNESS, I. **Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences**. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1997.

GUICCIARDINI, N. “La época del punto: el legado matemático de newton en el siglo XVIII. Universidad de Siena”. **Estudios de Filosofía**, vol. 35, 2006.

HALL, R. **Correcting the Principia**. Madrid: Osiris, 1958.

HALL, R. **Philosophers at War**: The Quarrel between Newton and Leibniz. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

HANKEL, H. “Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen”. **Mathematische Annalen**, vol. 20, 1870.

HERNÁNDEZ, C. **Galilei**: Diálogo sobre los dos sistemas máximos. Buenos Aires: Aguilar, 1975.

HURWITZ, A. "Demonstration of the inequality isoperimetric. University of Königsberg". **Acta Mathematica, and the "Nachrichten" of the Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen**, n. 123, 1901.

JANSANA, R. **Una introducción a la lógica modal**. Madrid: Tecnos, 1990.

KAHANE, J.; LEMARIE-RIEUSSET, P. **Fourier Series and Wavelets**. London: Gordon and Berach, 1995.

KIM, T. "Some identities on the q-Euler polynomials of higher order and q-Stirling numbers by the fermionic p-adic integral on ℤp". **Russian Journal of Mathematical Physics**, vol. 16, n. 4, 2009.

KLEIN, J. **Greek Mathemalical Thought and the Origin of AIgebra**. New York: Dover Publications, 1968.

KOLMOGOROV, A. "Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier". **Fundamenta Mathematicae**, vol. 7, 1925.

KOLMOGOROV, A. "Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier". **Fundamenta Mathematicae**, vol. 5, 1924.

KUHN, T. "Mathematical versus Experimental Traditions in the Development of Physical Science". *In*: KUHN, T. **The Essential Tension**: Selected Readings in Scientific Tradition and Change. Chicago: University of Chicago Press, 1977.

LAGRANGE, J. **Miscellanea Berolinensia**. Berlin: JC Papenius, 1749.

LAKATOS, I. **La Metodología de los Programas de Investigación**. Madrid: Alianza Editorial, 1978.

LEBESGUE, *H.* “Sur une définition due à M. Borel (lettre à M. le Directeur des Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure)*”*. **Annales scientifiques de l’É.N.S**., vol. 37, 1920.

LEBESGUE, H. “Sur une Généralisation de L´intégrale Définie”. **Comptes Rendus de l´Académie des Sciences**, vol. 132, 1901.

LEBESGUE, H. **Leçons sur l´integration et la recherche des fonctions primitives**. París: Gauthier-Villars, 1904.

LESSA, P. **Teoremas ergódicos en espacios hiperbólicos**. Montevideo: Universidad de la República, 2009.

LÓPEZ, M. **Al Rededor de la Hipótesis de Riemann**. Madrid: Academia Valverde, 2012.

MACLAURIN, C. **A Treatise of Fluxions, in Two Books**. Edimburgo: T.W. and T. Ruddimans, 1801.

MANDELBROTE, S. “Newton and Eighteenth-Century Christianity”. *In*: COHEN I. B.; SMITH, G. E. (eds.). **The Cambridge Companion to Newton**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

MATEUS-NIEVES, E. “Trigonometry vs. Trigonometric Integration”. **Acta Scientiae**, vol. 25, n. 3, 2023.

MATEUS-NIEVES, E. “Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial”. **Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación**, vol. 2, 2011.

MATEUS-NIEVES, E. “Epistemología de la Integral como Fundamento del Cálculo Integral”. **Bolema**, vol. 35, n. 71, 2022a.

MATEUS-NIEVES, E. “Evolución histórico-epistemológica del concepto de integral“. **Anales del Quinta Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática**. Bogotá: University of Colombia, 2015.

MATEUS-NIEVES, E. “Four weaknesses found in higher education students learning improper integrals”. **Conference Mathematics Education**. Bogotá: University of Colombia, 2021a.

MATEUS-NIEVES, E. “Lema de deformación de curvas para funciones de variable compleja”. **Conference: Mathematics Education**. Bogotá: University of Colombia, 2021b.

MATEUS-NIEVES, E. “Modelización del grupo fundamental de un nudo como estrategia para establecer la estructura de una superficie”. **Bolema**, vol. 36, n. 73, 2022b.

MATEUS-NIEVES, E. **Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del MIP** (Tesis Doctorado en Educación con Énfasis en Educación Matemática). Bogotá: Universidad Distrital, 2018.

MATEUS-NIEVES, E.; FONT, V. “Epistemic complexity of the mathematical object integral”. **Mathematics**, vol. 9, 2021.

MATEUS-NIEVES, E.; HERNÁNDEZ, W. “Modelling Improper Integrals, a Case Study“. **Acta Scientiae**, vol. 24, n. 5, 2022.

MITCHELL, D. **Introducción a la lógica**. Barcelona: Labor S. A., 1968.

MUÑOZ, J.; REGUERA, I. **Diario filosófico Ludwig Wittgenstein**. Barcelona: Editora Planeta-Agostini, 1986.

MURDOCH, P. **Neutoni genesis curvarum per umbras, seu perspectivae universalis elementa**. London: Kessinger Publishing, 1746.

NEWMAN, J. **Sigma**: El mundo de las matemáticas. Barcelona: Editora Grijalbo, 1994.

NEWTON, I. **Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias**: cum enumeratione linearum tertii ordinis. London: Kessinger Publishing, 1711.

NEWTON, I. **Opticks or, a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light**: Also, two Treatises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures. London: Kessinger Publishing, 1704.

PIER, J. **Histoire de l'intégration- Vingt-cinq siècles de Mathématiques**. Paris: Masson, 1996.

PLANCHEREL, M. "Le d´développement de la théorie des séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle". **L'Enseignement Mathématique**, vol. 24, 1924.

PLAYFAIR, J. "Traité de Mechanique Celeste". **The Edinburgh Review**, vol. 22, 1808.

PORTER, T. "A history of the classical isoperimetric problem". *In*: BLISS, G. A.; GRAVES, L. M. (eds.) **Contributions to the Calculus of Variations, 1931-1932**. Chicago: University of Chicago Press, 1993.

RESNIK, M. “Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference”. **Nous**, vol. 15, 1981.

RÍBNIKOV, K. **Historia de la Matemática**. Moscú: MIR, 1987.

ROSENY, M. *et al*. “Abel and Equations of the Fifth Degree”. **American Mathematical Monthly**, vol. 102, 1995.

RUDIN, W. **Principios de análisis**. Madrid: Ediciones del Castillo, 1966.

RUSSELL, B. **Los metafísicos y las matemáticas**. Barcelona: Editora Grijalbo, 1915.

SCHAFFER. S. “Newtonianismo”. *In*: OLBY, R. C. *et al*. (eds.). **Companion to the History of Modern Science**. London: Elsevier, 1990.

SEALEY, V. “Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: what is necessary and sufficient?” **Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, 2006.

SHAPIRO, S. “Mathematics and Reality”. **Philosophy of Science**, vol. 50, 1983.

SOLAECHE, M. “La controversia L’Hopital-Bernoulli”. **Divulgaciones Matemáticas**, vol. 1, n. 1, 1993.

SPIVAK, M. **Calculo infinitesimal**. Ciudad de México: Reverté S. A., 1981.

STEVIN, S. **L'arithmétique et la Pratique d'Arithmétiquement Les**. Leyden: Girard, 1585.

TALL, D.; KATZ, M. "A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus". **Educational Studies in Mathematics**, vol. 86, n. 1, 2014.

THOMSON, W. "Isoperimetric problems". *In*: KELVIN, W. T. **Popular lectures and addresses**: Contituition of matter. London: Macmillanand, 1984.

VON KOWALEVSKY, S. "Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung". **Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik**, vol. 80, 1875.

WALLIS, J. **A Treatise of Algebra**: both Historical and Practical. London: Royal Socyety, 1685.

WEIL, A. **Memorias de aprendizaje**. Madrid: Nivola, 1991.

WEISSTEIN, E. "Fundamental Theorems of Calculus". **MathWorld - A Wolfram** [1999]. Disponible en: <www.mathworld.wolfram.com>. Acesso em: 24/08/2023.

WUBING, H. **Lecciones de Historia de las Matemáticas**. Madrid: Editora Siglo XXI, 1979.

WUSSING, H. **Lecciones de historia de las matemáticas**. Madrid: Editora Siglo XXI, 1998.

ZYGMUND, A. **Lecture notes in mathématiques**: Intégrales singulières de 1900. New York: Springer, 1971.

SOBRE EL AUTOR

SOBRE EL AUTOR

Prof. Dr. Enrique Mateus-Nieves

Estudios de postdoctorado en Educación Matemática, Universidad de Barcelona. PhD en Educación-Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Docente universitario en posgrado a nivel maestría y doctorado, docente investigador y conferencista universitario. Entre las universidades colombianas donde he aportado están: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Universidad Pedagógica Nacional. Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda. Universidad del Atlántico. Universidad Externado de Colombia. Universidad de los Andes. Universidad Sur Colombiana. Universidad Colegios de Colombia UNICOC, entre otras. A nivel internacional Universidad de Panamá y Universidad de Barcelona.

E-mail para contacto: jeman124@gmail.com

REGLAMENTO DE PUBLICACIÓN

REGLAMENTO DE PUBLICACIÓN

La editorial IOLE recibe propuestas de libros o colecciones de autor para publicación en un flujo contínuo en cualquier época del año. El período para la revisión por pares de los manuscritos es de 7 días. El plazo de publicación es de 60 días después de la presentación del manuscrito.

El texto presentado para evaluación debe tener una extensión mínima de 50 páginas. El texto debe estar a espacio simple, Times New Roman y tamaño de fuente 12. Todo el texto debe seguir las normas ABNT.

No se deben incluir en el libro elementos pretextuales como dedicatoria y agradecimiento. Los elementos posttextuales como la biografía del autor de hasta 10 líneas y las referencias bibliográficas son obligatorios. Las imágenes y figuras deben presentarse dentro del cuerpo del texto.

El envío del texto debe realizarse en un solo archivo mediante un archivo de documento Word en línea. El autor/organizador debe enviar el manuscrito directamente a través del sistema editorial IOLE: http://ioles.com.br/editora

CONTACTO

EDITORA IOLE

Caixa Postal 253. Praça do Centro Cívico

Boa Vista, RR - Brasil

CEP: 69.301-970

@ http://ioles.com.br/editora

+ 55 (95) 981235533

eloisenhoras@gmail.com